UNIVERSITATEA DIN PITEŞTI

ŞCOALA DOCTORALĂ DE MATEMATICĂ

SISTEME ITERATIVE DE FUNCŢII CONSTITUITE DIN PHI-MAX CONTRACŢII

REZUMAT
TEZĂ DE DOCTORAT

Conducător ştiinţific
Prof. univ. dr. habil. Radu MICULESCU

Doctorand
Flavian GEORGESCU

2019

CUPRINS

CAPITOLUL III

SISTEME ITERATIVE DE FUNCŢII CONSTITUITE DIN CONTRACŢII CONVEXE GENERALIZATE ÎN CADRUL b-SPAŢIILOR METRICE

CAPITOLUL IV

SISTEME ITERATIVE DE FUNCŢII CONSTITUITE DIN φ-MAX-CONTRACŢII

CAPITOLUL V

MĂSURI INVARIANTE ALE OPERATORILOR MARKOV ASOCIAŢI SISTEMELOR ITERATIVE DE FUNCŢII, CU PROBABILITĂŢI ŞI CONSTITUITE DIN φ-MAX-CONTRACŢII

INTRODUCERE

Consideraţii privind conceptul de sistem iterativ de funcţii constituit din contracţii

Dat un spaţiu metric complet (X, d) şi o familie finită de contracţii $(f_i)_{i\in I}$, unde $f_i : X \to X$, putem considera funcţia $F : P_{cp}(X) \to P_{cp}(X)$ dată de $F(K) = \underset{i\in I}{\cup} f_i(K)$ pentru orice $K \in P_{cp}(X)$, unde $P_{cp}(X)$ semnifică familia submulţimilor compacte nevide ale lui X. Atunci există un unic element $A \in P_{cp}(X)$ cu proprietatea că $A = F(A)$. În plus, şirul $(F^{[n]}(K))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (în metrica Hausdorff-Pompeiu) la A pentru orice $K \in P_{cp}(X)$, unde $F^{[n]}$ semnifică compunerea lui F cu ea însăşi de n ori. Mulţimea A poartă numele de atractorul sistemului iterativ de funcţii constituit din contracţii $\mathcal{S} = ((X, d), (f_i)_{i\in I})$ şi se notează cu $A_{\mathcal{S}}$, iar F poartă numele de operatorul fractal asociat sistemului $\mathcal{S}$ şi se notează cu $F_{\mathcal{S}}$.

Acest rezultat a fost demonstrat de J. Hutchinson (vezi [41]) şi popularizat de M. Barnsley (vezi [10]), însă el a fost prefigurat de Moran (vezi [76]) şi de R.F. Williams (vezi [103]). Ideea demonstraţiei lui Hutchinson constă în utilizarea principiului contracţiilor pentru $F_{\mathcal{S}}$.

Dat un spaţiu metric complet (X, d), putem considera $\mathcal{A}_{(X,d)} = \{K \in P_{cp}(X)$ |există un sistem iterativ de funcţii constituit din contracţii $\mathcal{S} = ((X, d), (f_i)_{i\in I})$ astfel încât $K = A_{\mathcal{S}}\}$. Pe de o parte, printre elementele mulţimilor $\mathcal{A}_{(X,d)}$, unde (X, d) parcurge mulţimea spaţiilor metrice complete, care se numesc fractali de tip Hutchinson-Barnsley, regăsim majoritatea mulţimilor fractale clasice, precum mulţimea triadică a lui Cantor, triunghiul lui Sierpiński, curba lui Von Koch sau feriga lui Barnsley. Pe de altă parte, elemente din $P_{cp}(X) \setminus \mathcal{A}_{(X,d)}$, pentru diverse spaţii metrice complete (X, d), au fost construite de M. Kwieciński (vezi [54]), S. Crovisier şi M. Rams (vezi [24]), L. L. Stacho şi L.I. Szabo (vezi [97]) M.J. Sanders (vezi [88]), M. Kulczycki şi M. Nowak (vezi [52]) şi de T. Banakh şi M. Nowak (vezi [9]).

E. D'Aniello şi T.H. Steele (vezi [27]) au arătat că dacă (X, d) este compact, atunci $\mathcal{A}_{(X,d)}$ este o submulţime de tip F_σ a lui $(P_{cp}(X), H)$, unde H desemnează metrica Hausdorff-Pompeiu pe X. În plus, ei au arătat că $\mathcal{A}_{([0,1],d)}$ şi $P_{cp}([0, 1]) \setminus \mathcal{A}_{([0,1],d)}$ sunt dense în $P_{cp}([0, 1])$, unde $[0, 1]$ este înzestrat cu metrica euclidiană.

Consideraţii privind conceptul de sistem iterativ de funcţii constituit din contracţii şi cu probabilităţi

Problema existenţei şi unicităţii măsurii invariante a operatorilor de tip Markov asociaţi sistemelor iterative de funcţii constituite din contracţii şi cu probabilităţi a fost iniţată de J. Hutchinson (vezi [41]).

Motivaţia acestui studiu constă în faptul că întrucât există sisteme iterative de funcţii constituite din contracţii care au acelaşi atractor, în multe aplicaţii, este mult mai uşor să utilizăm atractorul unui astfel de sistem atunci când dispunem de structuri suplimentare (aşa cum este măsura invariantă menţionată anterior) pe el.

Această problematică a fost tratată şi în contexte mai largi (vezi [23], [42], [57], [61], [63], [71], [77], [92] şi [101]).

Aplicaţii ale sistemelor iterative de funcţii cu probabilităţi sunt menţionate în lucrările [83] -în legătură cu dinamica populaţiei şi răspândirea tuberculozei-, [47] şi [20] -în legătură cu unele modele de învăţare-, [11] şi [15].

Motivaţia alegerii temei de cercetare

Utilitatea conceptului de sistem iterativ de funcţii constituit din contracţii este subliniată de Teorema Colajului (datorată lui M. Barnsley) care caracterizează un sistem iterativ de funcţii constituit din contracţii al cărui atractor este apropiat (în metrica Hausdorff-Pompeiu) de o mulţime prestabilită. Mai precis, trebuie determinată o mulţime finită de contracţii pe un spaţiu metric complet (care să conţină mulţimea prestabilită) cu proprietatea că aceasta este apropiată (în metrica Hausdorff-Pompeiu) de reuniunea (i.e. colajul) imaginilor ei prin respectivele contracţii. Această posibilitate de a reconstrui imagini utilizând sisteme iterative de funcţii a fost folosită cu mare succes în compresia datelor.

Cele descrise mai sus au arătat că o cale de a lărgi clasa fractalilor de tip Hutchinson-Barnsley este dată de căutarea răspunsului la următoarea întrebare: Ce condiţii trebuie impuse asupra spaţiului X şi asupra funcţiilor f_i pentru a ne asigura că $F_{\mathcal{S}}$ este operator Picard? Una dintre direcţiile de cercetare generate de întrebarea anterioară este urmărirea unui răspuns care să implice considerarea unor funcţii care să aparţină unor clase de operatori Picard care sunt mai largi decât clasa contracţiilor.

Prezenta lucrare tratează următoarele teme:

- sistemele iterative de funcţii constituite din contracţii convexe generalizate în cadrul b-spaţiilor metrice (tari) complete;

- sistemele iterative de funcţii constituite din φ-max-contracţii (în particular cele constituie din contracţii Matkowski şi cele constituite din contracţii convexe).

Motivaţia elaborării prezentei teze este dată de apartenenţa temelor tratate la direcţia de cercetare expusă mai sus care are drept ţel extinderea clasei fractalilor de tip Hutchinson-Barnsley.

Structura lucrării

În capitolul iniţial colectăm notaţiile şi conceptele des utilizate în această lucrare. Mai precis, indicăm notaţiile implicând mulţimi, funcţii şi spaţii metrice. De asemenea, introducem noţiunile fundamentale privind conceptele de metrică Hausdorff-Pompeiu, spaţiul codurilor, operator Picard şi funcţie de comparaţie.

În cel de al doilea capitol prezentăm conceptele fundamentale utilizate în această lucrare, anume acelea de sistem iterativ de funcţii, de atractor al unui astfel de sistem şi de sistem iterativ de funcţii care admite proiecţie canonică.

În plus, trecem în revistă trei modalităţi prin care putem stabili că un sistem iterativ de funcţii are atractor, anume:

a) metoda clasică (datorată lui J. Hutchinson);

b) metoda atractorului (datorată lui R. Miculescu şi A. Mihail);

c) metoda proiecţiei canonice (datorată lui A. Mihail).

Ultimele două metode vor fi utilizate în cadrul acestei lucrări după cum urmează:

- în capitolul III se face apel la metoda atractorului;
- în capitolul IV se foloseşte metoda proiecţiei canonice.

Două dintre direcţiile de generalizare ale conceptului de sistem iterativ de funcţii sunt următoarele:

- considerarea unor funcţii ale căror domenii de definiţie sau de valori sunt mai generale;
- impunerea unor condiţii de contractivitate mai generale asupra funcţiilor constitutive ale sistemului.

Privitor la prima direcţie de generalizare, subliniem articolele [17], [22] şi [81] în care sunt studiate sistemele iterative de funcţii în cadrul b-spaţiilor metrice (noţiune introdusă de I.A. Bakhtin (vezi [8]) şi S. Czerwik (vezi [25] şi [26]).

În privinţa celei de a doua direcţii de generalizare, un interes special din punctul de vedere al celor ce urmează a fi prezentate în cel de al treilea capitol îl prezintă articolul [65] în care se introduce şi se studiază conceptul de sistem iterativ de funcţii constituit din contracţii convexe. Menţionăm că noţiunea de contracţie convexă generalizată a fost introdusă şi studiată de V. Istrăţescu (vezi [43], [44] şi [45]).

Rezultatele prezentate în cel de al treilea capitol reflectă conţinutul articolului [33]. Ele se încadrează în ambele direcţii de generalizare ale noţiunii de sistem iterativ de funcţii care au fost prezentate mai sus. Mai precis, utilizând metoda atractorului, studiem sisteme iterative de funcţii constând în contracţii convexe generalizate (ceea ce ilustrează a doua direcţie) în cadrul b-spaţiilor metrice (tari) complete (ilustrând prima direcţie), obţinând astfel o generalizare a teoremei de punct fix pentru contracţii convexe datorată lui Istrăţescu.

În cel de al patrulea capitol (care redă conţinutul articolului [34]), inspiraţi de ideile din [69], i.e. folosind metoda proiecţiei canonice, unui sistem iterativ de funcţii $\mathcal{S}$ îi asociem un operator $G_{\mathcal{S}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, unde $\mathcal{C}$ reprezintă spaţiul funcţiilor continue de la spaţiul codurilor la spaţiul metric corespunzător sistemului (vezi Definiţia IV.3.2). Demonstrăm că dacă $G_{\mathcal{S}}$ este operator Picard, atunci operatorul fractal asociat lui $\mathcal{S}$ este operator Picard şi că $\mathcal{S}$ admite proiecţie canonică (vezi Teorema IV.3.5). În plus, introducem conceptul de sistem iterativ de funcţii constituit din φ-max-contracţii (pe scurt φ-max-IFS- vezi Definiţia IV.2.6) şi arătăm că operatorul $G_{\mathcal{S}}$ asociat unui astfel de sistem $\mathcal{S}$ este Picard, deci $\mathcal{S}$ are atractor şi admite proiecţie canonică (vezi Teorema IV.3.6). Menţionăm că sistemele iterative de funcţii constituite din contracţii Matkowski şi cele constituite din contracţii convexe (vezi Definiţa II.20) sunt cazuri particulare de sisteme iterative de funcţii constituite din φ-max-contracţii.

Sistemele iterative de funcţii cu probabilităţi sunt bine cunoscute pentru aplicaţiile lor în compresia imaginilor (vezi [12], [13], [30] şi [31]).

Problema existenţei şi unicităţii măsurii invariante a operatorilor de tip Markov asociaţi sistemelor iterative de funcţii cu probabilităţi, care a fost iniţată de J. Hutchinson, a fost tratată şi în contexte mai largi.

Cel de al cincilea capitol (care oglindeşte conţinutul articolului [35]) este dedicat studiului operatorului Markov asociat unui sistem iterativ de funcţii, cu probabilităţi şi constituit din φ-max-contracţii. Mai precis vom arăta că un astfel de operator are o unică măsură invariantă al cărei suport este atractorul sistemului.

Rezultatele originale conţinute în prezenta teză şi metodele folosite pentru obţinerea lor

Principalele rezultate originale conţinute în prezenta teză sunt următoarele:

a) studierea (cu ajutorul metodei atractorului) sistemelor iterative de funcţii constituite din contracţii convexe generalizate în cadrul b-spaţiilor metrice (tari) complete;

b) demonstrarea (cu ajutorul metodei proiecţiei canonice) faptului că orice sistem iterativ de funcţii constituit din φ-max-contracţii are atractor şi admite proiecţie canonică;

c) demonstrarea faptului că operatorul Markov asociat unui sistem iterativ de funcţii, cu probabilităţi şi constituit din φ-max-contracţii, are o unică măsură invariantă al cărei suport este atractorul sistemului; menţionăm că măsura invariantă este obţinută prin utilizarea teoremei de reprezentare a lui Riesz, în contrast cu metoda clasică (datorată lui Hutchinson) care constă în utilizarea unei teoreme adecvate de punct fix pentru operatorul Markov.

Diseminarea rezultelor originale conţinute în prezenta teză

Rezultatele originale menţionate în secţiunea anterioară (notate cu a), b) şi c)) au fost aduse la cunoştinţa comunităţii matematice după cum urmează:

a)

În cadrul conferinţei *International Conference on Mathematics and Computer Science (MACOS 2016), Braşov, Romania, 2nd Edition*, vineri 9 septembrie 2016, am susţinut conferinţa cu titlul *IFSs consisting of generalized convex contractions*.

Am publicat articolele:

F. Georgescu, *IFSs consisting of generalized convex contractions*, An. Ştiinţ. Univ. "Ovidius" Constanţa, Ser. Mat., **25** (2017), 77-86.

F. Georgescu, *Iterated function systems consisting of generalized convex contractions in the framework of complete strong b-metric spaces*, An. Univ. Vest, Timiş., Ser. Mat.-Inform., **55** (2017), 119-142.

b)

În cadrul conferinţei *23*$^{\text{rd}}$ *International Conference on Difference Equations and Applications (ICDEA 2017), Timişoara, Romania*, luni 24 iulie 2017, am susţinut conferinţa cu titlul *Iterated function systems consisting of φ-max-contractions have attractor.*

Am publicat, în colaborare cu R. Miculescu şi A. Mihail, articolul *A study of the attractor of a φ-max-IFS via a relatively new method*, J. Fixed Point Theory Appl., (2018) 20:24.

c)

În cadrul conferinţei *4*$^{\text{th}}$ *International Conference on Numerical Analysis and Approximation Theory (NAAT 2018), Cluj-Napoca, Romania*, vineri 7 septembrie 2018, am susţinut conferinţa cu titlul *Invariant measures associated to φ-max-IFSs with probabilities.*

Am publicat, în colaborare cu R. Miculescu şi A. Mihail, articolul *Invariant measures of Markov operators associated to iterated function systems consisting of φ-max-contractions with probabilities*, Indagat. Math., **30** (2019), 214-226.

Mulţumiri

Doresc să-i mulţumesc conducătorului meu de doctorat pentru ajutorul şi suportul pe care le-am primit de-a lungul perioadei studiilor mele doctorale.

Mulţumirile mele se îndreaptă, de asemenea, către domnul lector dr. habil. Alexandru Mihail pentru sfaturile şi încurajările primite în decursul elaborării prezentei teze.

Îmi exprim gratitudinea faţă de membrii Departamentului de Matematică Informatică pentru crearea unui climat propice cercetărilor pe care le-am desfăşurat, precum şi faţă de colegii din Şcoala Doctorală cu care am dezbătut diverse teme şi ale căror prezentări mi-au lărgit cunoştinţele.

Nu în ultimul rând, sunt recunoscător familiei mele pentru înţelegerea şi sprijinul moral de care am avut parte în această perioadă solicitantă.

CAPITOLUL I

NOTAŢII, TERMINOLOGIE, NOŢIUNI FUNDAMENTALE

În acest capitol am colectat notaţiile şi conceptele utilizate în această lucrare.

Notaţii privind mulţimi şi funcţii

B^A semnifică mulţimea funcţiilor cu domeniul A şi codomeniul B.

Pentru o mulţime I şi $m \in \mathbb{N}^*$, vom folosi următoarele notaţii:

-
$$I^{\mathbb{N}^*} \stackrel{not}{=} \Lambda(I);$$

aşadar, elementele lui $\Lambda(I)$ pot fi prezentate sub forma unor cuvinte infinite $\omega = \omega_1\omega_2...\omega_n...$ cu litere din alfabetul I;

-
$$I^{\{1,2,...,m\}} \stackrel{not}{=} \Lambda_m(I);$$

aşadar, elementele lui $\Lambda_m(I)$ pot fi prezentate sub forma unor cuvinte $\omega = \omega_1\omega_2...\omega_m$ cu m litere din alfabetul I; m poartă numele de lungimea lui ω şi se notează cu $|\omega|$;

-
$$\Lambda_0(I) \cup \Lambda_1(I) \cup ... \cup \Lambda_{m-1}(I) \stackrel{not}{=} V_m(I),$$

unde mulţimea $\Lambda_0(I) = \{\lambda\}$ constă într-un unic element, anume cuvântul vid notat cu λ; aşadar $V_m(I)$ constă în mulţimea cuvintelor cu litere din alfabetul I care au cel mult $m-1$ litere;

-
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_n(I) \stackrel{not}{=} \Lambda^*(I);$$

aşadar $\Lambda^*(I)$ constă în mulţimea cuvintelor finite cu litere din alfabetul I.

Pentru $\omega = \omega_1\omega_2...\omega_k\omega_{k+1}... \in \Lambda(I)$ sau $\omega = \omega_1\omega_2...\omega_n \in \Lambda_n(I)$ şi $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \leq n$, vom folosi următoarea notaţie:

$$\omega_1\omega_2...\omega_m \stackrel{not}{=} [\omega]_m.$$

Date cuvintele $\omega = \omega_1\omega_2...\omega_n \in \Lambda^*(I)$ şi $\theta = \theta_1\theta_2...\theta_m \in \Lambda^*(I)$ sau $\theta = \theta_1\theta_2...\theta_k... \in \Lambda(I)$, prin $\omega\theta$ înţelegem concatenarea lor, i.e. $\omega_1\omega_2...\omega_n\theta_1\theta_2...\theta_m$, respectiv $\omega_1\omega_2...\omega_n\theta_1\theta_2...\theta_k...$.

Pentru o familie de funcţii $(f_i)_{i\in I}$, unde $f_i : X \to X$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in I$ şi $Y \subseteq X$, adoptăm următoarele notaţii:

-
$$f_{\alpha_1} \circ f_{\alpha_2} \circ ... \circ f_{\alpha_n} \overset{not}{=} f_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}$$

-
$$f_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(Y) \overset{not}{=} Y_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}.$$

Să remarcăm că $f_{\underbrace{i...i}_{n \text{ litere}}}$, unde $i \in I$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, reprezintă compunerea lui f_i cu ea însăşi de n ori. În cazul particular în care familia are un singur element, anume $f : X \to X$, pentru compunerea lui f cu ea însăşi de n ori, vom folosi notaţia consacrată $f^{[n]}$. Menţionăm că prin $f^{[0]}$ înţelegem $Id_X : X \to X$ descrisă de
$$Id_X(x) = x,$$
pentru orice $x \in X$.

Pentru o funcţie $f : X \to X$, prin f_λ (unde λ semnifică cuvântul vid) desemnăm Id_X.

Notaţii privind spaţiile metrice

Dat un spaţiu metric (X, d), $x \in X$, $A \subseteq X$ şi $r > 0$, prin:

- $B(x, r)$ notăm mulţimea $\{y \in X \mid d(y, x) < r\}$;

- $diam(A)$ notăm diametrul lui A;

- $P_{cp}(X)$ înţelegem mulţimea submulţimilor nevide şi compacte ale lui X;

- $\mathcal{C}(X)$ notăm mulţimea funcţiilor continue $f : X \to \mathbb{R}$;

- $\mathcal{B}(X)$ înţelegem σ-algebra submulţimilor Borel ale lui X;

- suportul unei măsuri Boreliene pozitive şi finite μ pe X (notat cu supp μ) înţelegem cea mai mică submulţime închisă a lui X pe care μ este concentrată; aşadar
$$\text{supp } \mu = \bigcap_{F=\overline{F}\subseteq X,\ \mu(F)=\mu(X)} F;$$

- $\mathcal{M}(X)$ desemnăm mulţimea măsurilor Borel pe X pozitive şi normalizate care au suport compact;

- $Lip_1(X, \mathbb{R})$ înţelegem mulţimea funcţiilor $f : X \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$lip(f) \overset{def}{=} \sup_{x,y \in X, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} \leq 1.$$

Metrica Hausdorff-Pompeiu

Dat un spaţiu metric (X, d), o submulţime nevidă A a lui X şi $\varepsilon > 0$, adoptăm următoarea notaţie:

$$E_\varepsilon(A) = \{y \in X \mid \text{există } x \in A \text{ astfel încât } d(x,y) < \varepsilon\} =$$

$$= \underset{x \in A}{\cup} B(x, \varepsilon).$$

Definiţia I.1. *Dat un spaţiu metric* (X, d), *funcţia*

$$H : P_{cp}(X) \times P_{cp}(X) \to [0, +\infty),$$

definită prin

$$H(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\} =$$

$$= \inf\{\varepsilon \in (0, \infty) \mid A \subseteq E_\varepsilon(B) \text{ şi } B \subseteq E_\varepsilon(A)\},$$

pentru orice $A, B \in P_{cp}(X)$, *unde*

$$d(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B) = \sup_{x \in A}(\inf_{y \in B} d(x, y)),$$

se dovedeşte a fi o metrică care poartă numele de metrica Hausdorff-Pompeiu.

Propoziţia I.5 (vezi Theorem 1.15 din [90])**.** *Dacă spaţiul metric* (X, d) *este complet, atunci şi* $(P_{cp}(X), H)$ *este complet.*

Spaţiul codurilor

Dată o mulţime nevidă I, putem înzestra pe $\Lambda(I)$ cu metrica descrisă astfel:

$$d_\Lambda(\omega,\theta)=\{\begin{array}{cc} 0, & \text{dacă } \omega=\theta \\ \frac{1}{2^{\min\{k\in\mathbb{N}^*|\omega_k\neq\theta_k\}}}, & \text{dacă } \omega\neq\theta \end{array},$$

unde $\omega=\omega_1\omega_2\omega_3...\omega_n\omega_{n+1}...$ şi $\theta=\theta_1\theta_2\theta_3...\theta_n\theta_{n+1}....$

Remarca I.8.

a) Metrica d_Λ induce pe $\Lambda(I)$ topologia produs.

b) Convergenţa în spaţiul metric $(\Lambda(I),d_\Lambda)$ este descrisă astfel: Şirul $(\omega^m)_{m\in\mathbb{N}}$, de elemente din $\Lambda(I)$, unde $\omega^m=\omega_1^m\omega_2^m\omega_3^m...\omega_n^m\omega_{n+1}^m...$, converge (în d_Λ) către $\omega=\omega_1\omega_2\omega_3...\omega_n\omega_{n+1}...\in\Lambda(I)$ dacă şi numai dacă pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$ există $m_k\in\mathbb{N}$ cu proprietatea că $\omega_k^{m_k}=\omega_k^p$ pentru orice $p\in\mathbb{N}$, $p\geq m_k$.

c) $(\Lambda(I),d_\Lambda)$ este un spaţiu metric complet.

d) Dacă I este finită, atunci $(\Lambda(I),d_\Lambda)$ este compact.

Operator Picard

Definiţia I.9. *O funcţie $f:X\to X$, unde (X,d) este un spaţiu metric, se numeşte operator Picard dacă există un unic element $x^*\in X$ astfel încât $f(x^*)=x^*$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}f^{[n]}(x)=x^*$ pentru orice $x\in X$.*

Funcţie de comparaţie

Definiţia I.10. *O funcţie $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ se numeşte funcţie de comparaţie dacă satisface următoarele proprietăţi:*

i) φ este crescătoare;

ii)

$$\lim_{n\to\infty}\varphi^{[n]}(x)=0,$$

pentru orice $x\in[0,\infty)$.

Definiţia I.13. *Fie $f:X\to X$, unde (X,d) este un spaţiu metric, şi φ o funcţie de comparaţie. Spunem că f este o φ-contracţie dacă*

$$d(f(x),f(y))\leq\varphi(d(x,y)),$$

pentru orice $x,y\in X$.

CAPITOLUL II

SISTEM ITERATIV DE FUNCŢII, ATRACTOR, PROIECŢIE CANONICĂ

În acest capitol prezentăm conceptele fundamentale utilizate în această lucrare, anume acelea de sistem iterativ de funcţii, de atractor al unui astfel de sistem şi de sistem iterativ de funcţii care admite proiecţie canonică.

În plus, trecem în revistă trei modalităţi prin care putem stabili că un sistem iterativ de funcţii are atractor, anume:

a) metoda clasică (datorată lui J. Hutchinson);

b) metoda atractorului (datorată lui R. Miculescu şi A. Mihail);

c) metoda proiecţiei canonice (datorată lui A. Mihail).

Ultimele două metode vor fi utilizate în cadrul acestei lucrări după cum urmează:

- în capitolul III se face apel la metoda atractorului;

- în capitolul IV se foloseşte metoda proiecţiei canonice.

Sistem iterativ de funcţii

Definiţia II.1. *Se numeşte sistem iterativ de funcţii un dublet* $((X,d),(f_i)_{i\in I})$*, unde* (X,d) *este un spaţiu metric complet şi* $(f_i)_{i\in I}$ *este o familie finită de funcţii continue definite pe* X *şi cu valori în* X.

Vom nota un astfel de sistem în modul următor:

$$\mathcal{S}=((X,d),(f_i)_{i\in I}).$$

Operatorul fractal asociat sistemului $\mathcal{S}$ este funcţia $F_{\mathcal{S}}:P_{cp}(X)\to P_{cp}(X)$ descrisă de

$$F_{\mathcal{S}}(K)=\underset{i\in I}{\cup}f_i(K)$$

pentru orice $K\in P_{cp}(X)$.

Spunem că sistemul iterativ de funcţii $\mathcal{S}$ are atractor dacă $F_{\mathcal{S}}$ este operator Picard.

Punctul fix al lui $F_{\mathcal{S}}$ se numeşte *atractorul* lui $\mathcal{S}$ şi se notează cu $A_{\mathcal{S}}$.

Sistem iterativ de funcţii care admite proiecţie canonică

Definiţia II.2. *Spunem că sistemul iterativ de funcţii* $\mathcal{S} = ((X,d),(f_i)_{i\in I})$ *având atractor admite proiecţie canonică dacă:*

i) Pentru orice $\omega = \omega_1\omega_2...\omega_n\omega_{n+1}... \in \Lambda(I)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_{\omega_1...\omega_n}(x)$ *- notată cu* $\pi(\omega)$ *- există şi nu depinde de* $x \in X$.

ii) $\pi(\omega) \in A_{\mathcal{S}}$ *pentru orice* $\omega \in \Lambda(I)$.

iii) Funcţia $\pi : \Lambda(I) \to A_{\mathcal{S}}$ *(care se numeşte proiecţie canonică de la* $\Lambda(I)$ *la* $A_{\mathcal{S}}$*) are următoarele proprietăţi:*

j) este continuă;

jj) este surjectivă;

jjj) pentru orice $i \in I$*, avem:*

$$\pi \circ \tau_i = \widetilde{f_i} \circ \pi,$$

unde $\tau_i : \Lambda(I) \to \Lambda(I)$ *este dată de* $\tau_i(\omega) = i\omega$ *pentru orice* $\omega \in \Lambda(I)$ *şi* $\widetilde{f_i} : A_{\mathcal{S}} \to A_{\mathcal{S}}$ *este dată de* $\widetilde{f_i}(x) = f_i(x)$ *pentru orice* $x \in A_{\mathcal{S}}$.

Metoda clasică

`Descrierea metodei`

Fie $\mathcal{S} = ((X,d),(f_i)_{i\in I})$ un sistem iterativ de funcţii şi $\mathcal{P}$ o clasă de operatori Picard astfel încât f_i este un element al lui $\mathcal{P}$ pentru orice $i \in I$.

Metoda clasică constă în justificarea existenţei atractorului lui $\mathcal{S}$ prin stabilirea apartenenţei lui $F_{\mathcal{S}}$ la clasa $\mathcal{P}$.

Prin urmare, $F_{\mathcal{S}}$ are un unic punct fix $A_{\mathcal{S}}$ şi

$$\lim_{n\to\infty} F_{\mathcal{S}}^{[n]}(K) = A_{\mathcal{S}},$$

pentru orice submulţime compactă şi nevidă K a spaţiului metric asociat sistemului, ceea ce justifică terminologia de atractor atribuită lui $A_{\mathcal{S}}$.

Metoda descrisă mai sus a fost introdusă de J. Hutchinson (vezi [41]) în cazul sistemelor iterative de funcţii constituite din contracţii. Mai precis, avem următoarea:

Definiţia II.3. *Un sistem iterativ de funcţii constituit din contracţii este un sistem iterativ de funcţii* $\mathcal{S} = ((X,d),(f_k)_{k\in\{1,...,n\}})$ *cu proprietatea că* f_k *este contracţie pentru orice* $k \in \{1,...,n\}$.

Teorema II.4 (vezi [41]). *Pentru orice sistem iterativ de funcţii constituit din contracţii $\mathcal{S}$, operatorul fractal $F_{\mathcal{S}}$ este contracţie* (în raport cu metrica Hausdorff-Pompeiu). *În particular, el este operator Picard.*

Remarca II.5. *În clasa mulţimilor care se pot prezenta ca atractor al unui sistem iterativ de funcţii constituit din contracţii putem găsi majoritatea mulţimilor fractale standard (mulţimea triadică a lui Cantor, triunghiul lui Sierpinski, buretele lui Monge, feriga lui Barnsley, curba lui Koch etc).*

Remarca II.6. *Menţionăm că există mulţimi compacte ale lui $\mathbb{R}$ care nu pot fi prezentate ca atractorul nici unui sistem iterativ de funcţii constituit din contracţii* (vezi [9], [24], [52], [54], [88] şi [97]).

Cele două remarci de mai sus stau la baza efortului actual de a dezvolta teoria sistemelor iterative de funcţii, care a fost fundamentată de J. Hutchinson şi popularizată de M. Barnsley (vezi [10]), prin considerarea sistemelor iterative de funcţii constituite din elemente care satisfac condiţii de contractivitate mai generale.

`Rezultate obţinute prin utilizarea metodei clasice`

Pentru început prezentăm un rezultat, obţinut prin utilizarea metodei clasice, ce vizează sistemele iterative de funcţii constituite din contracţii slabe.

Definiţia II.7 (vezi Definition 2.1 din [38]). *O funcţie $f : X \to X$, unde (X, d) este un spaţiu metric, se numeşte contracţie slabă dacă*

$$\lim_{\substack{s \to t \\ s > t}} \sup_{x,y \in X,\ d(x,y) \leq s} d(f(x), f(y)) < t,$$

pentru orice $t > 0$.

Teorema II.10 (vezi Lemma 2.3 şi Theorem 3.1 din [38]). *Pentru orice sistem iterativ de funcţii constituit din contracţii slabe $\mathcal{S} = ((X, d), (f_k)_{k \in \{1,\ldots,n\}})$, operatorul fractal $F_{\mathcal{S}}$ este o contracţie slabă* (în raport cu metrica Hausdorff-Pompeiu).

Remarca II.11. *Teorema anterioară a fost generalizată de Y. Shiota* (vezi [94]) prin înlocuirea cerinţei ca funcţiile f_k să fie contracţii slabe cu următoarea cerinţă mai generală: funcţiile f_k sunt continue şi există $N \in \mathbb{N}^*$

astfel încât $f_{\omega_1} \circ f_{\omega_2} \circ ... \circ f_{\omega_N}$ este contracţie slabă pentru orice $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N \in \{1, ..., n\}$.

În continuare prezentăm un rezultat, mai recent, obţinut tot prin utilizarea metodei clasice, ce tratează sistemele iterative de funcţii constituite din F-contracţii.

Definiţia II.12 (vezi Definition 2.1 din [100])**.** *Spunem că o funcţie $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ aparţine clasei $\mathcal{F}$ dacă satisface următoarele trei condiţii:*
i) F este strict crescătoare;
ii) pentru orice şir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de numere reale pozitive este validă echivalenţa:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} F(x_n) = -\infty;$$

iii) există $\lambda \in (0, 1)$ astfel încât

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\lambda F(x) = 0.$$

Definiţia II.14 (vezi Definition 2.1 din [100])**.** *Fie (X, d) un spaţiu metric şi $F \in \mathcal{F}$. O funcţie $f : X \to X$ se numeşte F-contracţie dacă există $\tau > 0$ astfel încât*

$$\tau + F(d(f(x), f(y))) \le F(d(x, y)),$$

pentru orice $x, y \in X$ cu proprietatea că $f(x) \neq f(y)$.

Definiţia II.18 (vezi Definition 4.1 din [91])**.** *Un sistem iterativ de funcţii constituit din F-contracţii este un sistem iterativ de funcţii $\mathcal{S} = ((X, d), (f_k)_{k\in\{1,...,n\}})$ cu proprietatea că există o familie finită $(F_k)_{k\in\{1,...,n\}}$ de elemente din $\mathcal{F}$ astfel încât f_k este F_k-contracţie pentru orice $k \in \{1, ..., n\}$.*

Teorema II.19 (vezi Theorem 4.1 din [91])**.** *Fie $\mathcal{S} = ((X, d), (f_k)_{k\in\{1,...,n\}})$ un sistem iterativ de funcţii constând din F-contracţii astfel încât $F - F_k$ este crescătoare pentru orice $k \in \{1, 2, ..., n\}$, unde $F = \max\{F_1, ..., F_n\}$. Atunci $F \in \mathcal{F}$ şi operatorul fractal $F_{\mathcal{S}}$ este o F-contracţie* (în raport cu metrica Hausdorff-Pompeiu)*. În particular, el este operator Picard.*

În situaţiile în care aplicarea metodei clasice este dificilă dispunem de două metode alternative care vor fi prezentate în continuare.

Metoda atractorului

`Descrierea metodei`

Această metodă (introdusă în [65]) constă în justificarea existenţei atractorului unui sistem iterativ de funcţii $\mathcal{S} = ((X, d), (f_i)_{i \in I})$ prin parcurgerea următorilor paşi:

Pas 1. Demonstrarea existenţei unui unic element $A \in P_{cp}(X)$ cu proprietatea că

$$\lim_{n \to \infty} F_{\mathcal{S}}^{[n]}(K) = A,$$

pentru orice $K \in P_{cp}(X)$.

Pas 2. Utilizarea continuităţii secvenţiale a operatorului fractal $F_{\mathcal{S}}$ pentru a conchide că acesta este operator Picard şi că $A = A_{\mathcal{S}}$.

Numele metodei este sugerat de pasul 1.

`Rezultate obţinute prin utilizarea metodei atractorului`

Un prim rezultat obţinut prin metoda menţionată mai sus se referă la sisteme iterative de funcţii constituite din contracţii convexe.

Definiţia II.20 (vezi Definiţia 3.1 din [65]). *Un sistem iterativ de funcţii constituit din contracţii convexe este un sistem iterativ de funcţii $\mathcal{S} = ((X, d), (f_k)_{k \in I})$ cu proprietatea că pentru orice $i, j \in I$ există $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in [0, \infty)$ astfel încât:*

i)

$$a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} \overset{def}{=} d_{ij} \text{ şi } \max_{i,j \in I} d_{ij} < 1;$$

ii)

$$d((f_i \circ f_j)(x), (f_i \circ f_j)(y)) \leq a_{ij} d(x, y) + b_{ij} d(f_i(x), f_i(y)) + c_{ij} d(f_j(x), f_j(y)),$$

pentru orice $i, j \in I$ şi orice $x, y \in X$.

Teorema II.21 (vezi Theorem 3.2 din [65]). *Fie $\mathcal{S} = ((X, d), (f_i)_{i \in I})$ un sistem iterativ de funcţii constând din contracţii convexe. Atunci $F_{\mathcal{S}}$ este operator Picard, i.e. $\mathcal{S}$ are atractor.*

Un al doilea rezultat obţinut prin metoda atractorului este dedicat sistemelor iterative de funcţii de tip Reich (a se vedea Definition 3.1 din [64] şi Theorem 3.2 din [64]).

Metoda proiecţiei canonice

`Descrierea metodei`

Această metodă constă în justificarea existenţei atractorului unui sistem iterativ de funcţii $\mathcal{S}$ prin construcţia unui operator $G_{\mathcal{S}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, unde $\mathcal{C}$ reprezintă spaţiul funcţiilor continue de la spaţiul codurilor la spaţiul metric corespunzător sistemului şi demonstrarea faptului că dacă $G_{\mathcal{S}}$ este operator Picard, atunci $F_{\mathcal{S}}$ este operator Picard (deci $\mathcal{S}$ are atractor) şi $\mathcal{S}$ admite proiecţie canonică.

`Rezultate obţinute prin utilizarea metodei proiecţiei canonice`

Definiţia II.24. *O funcţie $f : X \to X$, unde (X, d) este un spaţiu metric, se numeşte Meir-Keeler dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_{\varepsilon} > 0$ astfel încât*

$$d(f(x), f(y)) < \varepsilon,$$

pentru orice $x, y \in X$ cu proprietatea că $d(x, y) < \varepsilon + \delta_{\varepsilon}$.

Teorema II.25 (vezi Theorem 3.2 din [69])**.** *Orice sistem iterativ de funcţii $\mathcal{S} = ((X, d), (f_i)_{i \in I})$ astfel încât funcţiile f_i sunt Meir-Keeler are atractor. Mai precis,*

$$A_{\mathcal{S}} = \pi_0(\Lambda(I)),$$

π_0 fiind punctul fix al operatorului Picard $G_{\mathcal{S}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ descris de

$$G_{\mathcal{S}}(g) = G_{\mathcal{S},g},$$

pentru orice $g \in \mathcal{C}$, unde $\mathcal{C}$ desemnează spaţiul metric al funcţiilor continue de la $\Lambda(I)$ la X înzestrat cu distanţa uniformă şi funcţia $G_{\mathcal{S},g} : \Lambda(I) \to X$ este dată de

$$G_{\mathcal{S},g}(\omega_1\omega_2...\omega_n...) = (f_{\omega_1} \circ g \circ R)(\omega_1\omega_2...\omega_n...),$$

$R : \Lambda(I) \to \Lambda(I)$ acţionând după regula

$$R(\omega_1\omega_2...\omega_n...) = \omega_2...\omega_n...,$$

pentru orice $\omega_1\omega_2...\omega_n\omega_{n+1}... \in \Lambda(I)$.

CAPITOLUL III

SISTEME ITERATIVE DE FUNCŢII CONSTITUITE DIN CONTRACŢII CONVEXE GENERALIZATE ÎN CADRUL b-SPAŢIILOR METRICE

Conceptul de contracţie convexă generalizată a fost introdus de V. Istrăţescu (vezi [43], [44] şi [45]), iar cel de b-spaţiu metric de I.A. Bakhtin (vezi [8]) şi S. Czerwik (vezi [25] şi [26]).

În acest capitol, care reflectă conţinutul lucrării [33], vom combina cele două concepte mai sus amintite. Mai precis, vom studia sisteme iterative de funcţii constituite din contracţii convexe generalizate în cadrul b-spaţiilor metrice. Utilizând metoda atractorului, vom demonstra existenţa şi unicitatea atractorului unui astfel de sistem, obţinând astfel o generalizare a teoremei de punct fix pentru contracţii convexe datorată lui Istrăţescu.

1. Introducere

Două dintre direcţiile de generalizare ale conceptului de sistem iterativ de funcţii sunt următoarele:

- considerarea unor funcţii ale căror domenii de definiţie sau de valori sunt mai generale (vezi, spre exemplu, [6], [16], [21], [22], [37], [51], [56] şi [81]).

- impunerea unor condiţii de contractivitate mai generale asupra funcţiilor constitutive ale sistemului (vezi, spre exemplu, [29], [58], [64], [65], [71], [72], [81], [85], [91], [93], [98] şi [99]).

Privitor la prima direcţie de generalizare, subliniem articolele [16], [22] şi [81] în care sunt studiate sistemele iterative de funcţii în cadrul b-spaţiilor metrice. Menţionăm că în ultima perioadă s-au obţinut o serie de teoreme de punct fix în cadrul b-spaţiilor metrice (vezi, spre exemplu, [1], [7], [14], [17], [18], [28], [48], [49], [50], [53], [67], [74], [75], [80], [82], [84], [86], [87], [89], [95], [96] şi [104]).

În privinţa celei de a doua direcţii de generalizare, un interes special din punctul de vedere al celor ce urmează a fi prezentate în acest capitol îl prezintă articolul [65] în care se introduce şi se studiază conceptul de sistem iterativ de funcţii constituit din contracţii convexe. Menţionăm că noţiunea de contracţie convexă generalizată, care a fost introdusă şi studiată de V. Istrăţescu (vezi [43], [44] şi [45]), a constituit de asemenea obiectul cercetărilor lui S. András (vezi [4] şi [5]).

Definiţia III.1.1. *O funcţie continuă $f : X \to X$, unde (X, d) este un spaţiu metric, se numeşte contracţie convexă generalizată dacă există $m \in \mathbb{N}^*$ şi $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1} \geq 0$ astfel încât*

$$\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i < 1$$

şi

$$d(f^{[m]}(x), f^{[m]}(y)) \leq \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k d(f^{[k]}(x), f^{[k]}(y)),$$

pentru orice $x, y \in X$.

Ei au demostrat că orice contracţie convexă generalizată continuă este operator Picard.

În cazul $m = 1$ obţinem conceptul de contracţie, iar în cazul $m = 2$ pe cel de contracţie convexă.

Generalizări ale rezultatului lui Istrăţescu se găsesc în [2], [36], [40], [55], [62] şi [79].

Rezultatele prezentate în acest capitol se încadrează în ambele direcţii de generalizare ale noţiunii de sistem iterativ de funcţii care au fost prezentate mai sus. Mai precis, studiem sisteme iterative de funcţii constituite din contracţii convexe generalizate (ceea ce ilustrează a doua direcţie) în cadrul b-spaţiilor metrice (tari) complete (ilustrând prima direcţie).

Pe de o parte este datoria noastră să menţionăm influenţa exercitată de articolul [65] asupra conţinutului acestui capitol.

Pe de altă parte, trebuie să subliniem că, atunci când lucrăm în cadrul spaţiilor b-metrice, există unele restricţii consistente în raport cu cadrul clasic al spaţiilor metrice. În acest sens, dat un b-spaţiu metric (X, d, s) (vezi Definiţia III.2.1), $x \in X$, $r > 0$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şiruri de elemente din X şi $u, v \in X$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = u$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = v$ (vezi Definiţia III.2.4), menţionăm următoarele :

- $\{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ nu este neapărat deschisă (vezi [3]);
- $\{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$ nu este neapărat închisă;
- d nu este neapărat continuă (de fapt avem

$$\frac{1}{s^2} d(u, v) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \leq s^2 d(u, v)$$

şi

$$\frac{1}{s}d(u,x) \leq \varliminf_{n\to\infty} d(x_n,x) \leq \varlimsup_{n\to\infty} d(x_n,x) \leq sd(u,x)$$

vezi [75], [80] şi [86]).

2. Preliminarii

Câteva fapte fundamentale privind b-spaţiile metrice

Definiţia III.2.1. *Fie X o mulţime nevidă şi $s \in [1,\infty)$. O funcţie $d : X \times X \to [0,\infty)$ se numeşte b-metrică dacă satisface următoarele proprietăţi :*

i)

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

ii)

$$d(x,y) = d(y,x),$$

pentru orice $x, y \in X$;

iii)

$$d(x,y) \leq s(d(x,z) + d(z,y)),$$

pentru orice $x, y, z \in X$.

Un sistem precum cel descris mai sus se va nota cu (X,d,s) şi se va numi b-spaţiu metric cu constanta s.

Exemplele clasice de b-spaţii metrice sunt $l^p(\mathbb{R})$ şi $L^p[0,1]$, cu $p \in (0,1)$. Alte exemple de astfel de spaţii pot fi găsite în [7], [14], [18], [25] şi [26].

Remarca III.2.2. *Orice spaţiu metric este un b-spaţiu metric (cu constanta 1). Există b-spaţii metrice care nu sunt spaţii metrice.*

Definiţia III.2.4. *Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente dintr-un b-spaţiu metric (X,d,s) se numeşte:*

- convergent dacă există $l \in X$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,l) = 0;$$

în acest caz vom utiliza notaţia $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ care este justificată de unicitatea lui l;

- Cauchy dacă $\lim_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n) = 0$*, i.e. pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât*

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_\varepsilon$.

Un b-spaţiu metric (X, d, s) *se numeşte complet dacă orice şir Cauchy de elemente din* X *este convergent.*

Remarca III.2.6. *Vom înzestra un b-spaţiu metric cu topologia indusă de convergenţa şirurilor.*

În particular, avem:

- închiderea $\overline{Y}$ *unei submulţimi* Y *a unui b-spaţiu metric* (X, d, s) *este definită astfel:*

$$\overline{Y} = \{x \in X \mid \textit{există } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ şir de elemente din } Y \textit{ astfel încât } \lim_{n\to\infty} x_n = x\};$$

- o funcţie $f : A \to X$*, unde* A *este o submulţime a b-spaţiu metric* (X, d, s)*, este continuă dacă* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(l)$ *pentru orice şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de elemente din* A *convergent către* $l \in A$.

Deoarece, aşa cum am menţionat în Introducere, într-un b-spaţiu metric arbitrar, distanţa d nu este neapărat continuă, vom introducere o subclasă a b-spaţiilor metrice care remediază acest neajuns.

Definiţia III.2.7. *Dată o mulţime nevidă* X *şi un număr real* $s \in [1, \infty)$*, o funcţie* $d : X \times X \to [0, \infty)$ *se numeşte b-metrică tare dacă satisface următoarele proprietăţi:*

i)

$$d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y;$$

ii)

$$d(x, y) = d(y, x),$$

pentru orice $x, y \in X$*;*

iii)

$$d(x, y) \leq d(x, z) + sd(z, y),$$

pentru orice $x, y, z \in X$.

Printr-un abuz de notaţie, vom nota un astfel de sistem tot cu (X, d, s) şi îl vom numi b-spaţiu metric tare cu constanta s.

Remarca III.2.8. *Orice spaţiu metric este un b-spaţiu metric tare cu constanta* $s = 1$. *Orice b-spaţiu metric tare cu constanta* s *este b-spaţiu metric cu constanta* s.

Propoziţia III.2.9 (vezi paginile 122 şi 123 din [50]**).** *Fie* (X, d, s) *un b-spaţiu metric tare. Atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$ *pentru orice şiruri* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *şi* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de elemente din* X *şi* $x, y \in X$ *astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, *i.e.* d *este continuă.*

Câteva fapte fundamentale privind metrica Hausdorff-Pompeiu în cadrul b-spaţiilor metrice

Urmărind notaţiile din [16], vom utiliza următoarele clase de părţi ale unui b-spaţiu metric (X, d, s):

-
$$\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\};$$

-
$$P(X) = \{Y \in \mathcal{P}(X) \mid Y \neq \emptyset\};$$

-
$$P_{cp}(X) = \{Y \in P(X) \mid Y \text{ este compactă}\},$$

unde Y compactă însemnă că pentru orice şir de elemente din Y există un subşir convergent la un element din Y.

Definiţia III.2.10. *Pentru un b-spaţiu metric* (X, d, s), *vom considera funcţia* $H : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ *descrisă astfel:*

$$H(A, B) = \max\{\sup_{x\in A}(\inf_{y\in B} d(x, y)), \sup_{x\in B}(\inf_{y\in A} d(x, y))\} =$$

$$= \inf\{\delta \in [0, \infty] \mid A \subseteq E_\delta(B) \text{ şi } B \subseteq E_\delta(A)\},$$

pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(X)$, *unde*

$$E_\delta(A) = \bigcup_{x\in A} B(x, \delta) = \{y \in X \mid \text{există } x \in A \text{ astfel încât } d(x, y) < \delta\}.$$

Conceptul de operator Picard

Definiţia III.2.11. *O funcţie $f : X \to X$, unde (X, d, s) este un b-spaţiu metric, se numeşte operator Picard dacă există un unic $x^* \in X$ astfel încât $f(x^*) = x^*$ şi $\lim_{n\to\infty} f^{[n]}(x) = x^*$ pentru orice $x \in X$.*

3. Rezultatele principale

Definiţia III.3.1. *Dat un număr natural m, prin sistem iterativ de funcţii constituit din contracţii convexe generalizate înţelegem un dublet $((X, d, s), (f_i)_{i\in I})$, unde (X, d, s) este un b spaţiu metric complet şi $(f_i)_{i\in I}$ o familie finită de funcţii continue definite pe X cu valori în X, cu următoarele proprietăţi: pentru orice $\omega \in \Lambda_m(I)$ există o familie de numere reale pozitive $(a_{\omega,v})_{v\in V_m(I)}$ astfel încât:*

α)

$$\max_{\omega\in\Lambda_m(I)} \sum_{v\in V_m(I)} a_{\omega,v} < \frac{1}{s^m};$$

β)

$$d(f_\omega(x), f_\omega(y)) \leq \sum_{v\in V_m(I)} a_{\omega,v} d(f_v(x), f_v(y)),$$

pentru orice $\omega \in \Lambda_m(I)$ şi orice $x, y \in X$.

Un astfel de sistem se va nota cu

$$\mathcal{S} = ((X, d, s), m, (f_i)_{i\in I}).$$

Unui astfel de sistem i se poate asocia funcţia $F_{\mathcal{S}} : P_{cp}(X) \to P_{cp}(X)$ dată de

$$F_{\mathcal{S}}(K) = \bigcup_{i\in I} f_i(K)$$

pentru orice $K \in P_{cp}(X)$.

Spunem că sistemul iterativ de funcţii $\mathcal{S}$ are atractor dacă $F_{\mathcal{S}}$ este operator Picard.

Punctul fix al lui $F_{\mathcal{S}}$ se numeşte *atractorul* lui $\mathcal{S}$ şi se notează cu $A_{\mathcal{S}}$.

În cele ce urmează, pentru un sistem iterativ de funcţii constând în contracţii convexe generalizate pe un b-spaţiu metric complet $\mathcal{S} = ((X, d, s), m, (f_i)_{i\in I})$, vom utiliza următoarele notaţii:

-

$$\delta(K_1, K_2) \overset{not}{=} \sup_{x \in K_1, y \in K_2} d(x, y),$$

pentru orice $K_1, K_2 \in P_{cp}(X)$;

-

$$x_n(K_1, K_2) \overset{not}{=} \max\{\delta(f_\omega(K_1), f_\omega(K_2)) \mid \omega \in \Lambda_n(I)\},$$

unde $K_1, K_2 \in P_{cp}(X)$, $n \in \mathbb{N}^*$;

-

$$y_n(K_1, K_2) = \max\{x_n(K_1, K_2), ..., x_{n-m+2}(K_1, K_2), x_{n-m+1}(K_1, K_2)\},$$

unde $n \in \mathbb{N}^*$, $n > m - 1$ şi $K_1, K_2 \in P_{cp}(X)$.

Propoziţia III.3.2. *Pentru orice sistem iterativ de funcţii constituit din contracţii convexe generalizate $\mathcal{S} = ((X, d, s), m, (f_i)_{i \in I})$, există $A_{\mathcal{S}} \in P_{cp}(X)$ astfel încât şirul $(F_{\mathcal{S}}^{[n]}(K))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge* (în metrica Hausdorff-Pompeiu) *către $A_{\mathcal{S}}$ pentru orice $K \in P_{cp}(X)$.*

Demonstraţie. Demonstraţia este împărţită în patru paşi:

Primul pas este să arătăm că şirul $(y_{k+m}(K_1, K_2))_{k \in \mathbb{N}}$ este descrescător pentru orice $K_1, K_2 \in P_{cp}(X)$.

Al Doilea Pas constă în demonstrarea faptului că seria $\sum\limits_{k=m}^{\infty} s^k y_k(K_1, K_2)$ este convergentă pentru orice $K_1, K_2 \in P_{cp}(X)$.

Al Treilea Pas este reprezentat de justificarea faptului că şirul $(F_{\mathcal{S}}^{[k]}(K))_{k \in \mathbb{N}^*}$ este convergent pentru orice $K \in P_{cp}(X)$.

Al Patrulea Pas rezidă în a arăta că toate şirurile $(F_{\mathcal{S}}^{[k]}(K))_{k \in \mathbb{N}^*}$, unde $K \in P_{cp}(X)$, au aceeaşi limită.

În final, notând cu $A_{\mathcal{S}}$ limita comună a şirurilor $(F_{\mathcal{S}}^{[k]}(K))_{k \in \mathbb{N}^*}$, unde $K \in P_{cp}(X)$, concluzionăm că $\lim\limits_{k \to \infty} H(F_{\mathcal{S}}^{[k]}(K), A_{\mathcal{S}}) = 0$ pentru orice $K \in P_{cp}(X)$. □

Propoziţia III.3.3. *Pentru orice sistem iterativ de funcţii constând din contracţii convexe generalizate $\mathcal{S} = ((X, d, s), m, (f_i)_{i \in I})$ şi orice $\omega \in \Lambda(I)$, există $A_\omega \in P_{cp}(X)$ astfel încât*

$$\lim_{k \to \infty} H(f_{[\omega]_k}(K), A_\omega) = 0,$$

pentru orice $K \in P_{cp}(X)$.

Următoarele două leme furnizează detalii privind convergenţa prezentată în cadrul Propoziţiei III.3.3.

Lema III.3.4. *În cadrul Propoziţiei III.3.3, avem*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\omega\in\Lambda(I)} H(f_{[\omega]_n}(K), A_\omega) = 0,$$

pentru orice $K \in P_{cp}(X)$, i.e. convergenţa descrisă în cadrul propoziţiei mai sus menţionate este uniformă în raport cu $\omega \in \Lambda(I)$.

Lema III.3.5. *În cadrul Propoziţiei III.3.3, mulţimea A_ω constă într-un unic element care va fi notat cu a_ω.*

Remarcile anterioare pot fi sumarizate astfel:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\omega\in\Lambda(I)} H(f_{[\omega]_n}(K), \{a_\omega\}) = 0,$$

pentru orice $K \in P_{cp}(X)$.

Rezultatul următor furnizează, în cazul b-spaţiilor metrice tari, o descriere a lui $A_\mathcal{S}$ prin intermediul elementelor a_ω.

Propoziţia III.3.6. *Pentru orice sistem iterativ de funcţii constând din contracţii convexe generalizate $\mathcal{S} = ((X,d,s), m, (f_i)_{i\in I})$, unde (X,d,s) este un b-spaţiu metric tare complet, cu notaţiile utilizate în remarcile anterioare, $A_\mathcal{S}$ este închiderea mulţimii $\{a_\omega \mid \omega \in \Lambda(I)\}$.*

Propoziţie III.3.7. *Pentru orice sistem iterativ de funcţii constând din contracţii convexe generalizate $\mathcal{S} = ((X,d,s), m, (f_i)_{i\in I})$, unde (X,d,s) este un b-spaţiu metric tare complet, $F_\mathcal{S}$ este continuă.*

Propoziţie III.3.8. *Pentru orice sistem iterativ de funcţii constând din contracţii convexe generalizate $\mathcal{S} = ((X,d,s), m, (f_i)_{i\in I})$, unde (X,d,s) este un b-spaţiu metric tare complet, $F_\mathcal{S}$ este operator Picard.*

4. Remarci finale

Putem reformula propoziţia anterioară astfel:

Teorema III.4.1. *Orice sistem iterativ de funcţii constituit din contracţii convexe generalizate pe un b-spaţiu metric tare complet are atractor.*

Remarca III.4.2. *Propoziţia III.3.2 explică de ce $A_{\mathcal{S}}$ poartă numele de atractorul lui $\mathcal{S}$, anume pentru că "atrage" toate elementele lui $P_{cp}(X)$.*

Remarca III.4.3. *Cazul $s = 1$ a fost tratat în* [32]. *Dacă mulţimea I are un unic element, $((X, d, 1), m, (f_i)_{i \in I})$ reprezintă noţiunea de contracţie convexă generalizată introdusă de V. Istrăţescu. Noţiunea de sistem iterativ de funcţii constituit din contracţii convexe introdusă în* [65] *este un caz particular al celei de sistem iterativ de funcţii constituit din contracţii convexe generalizate (anume cazul $m = 2$).*

Un exemplu

Vom considera spaţiul metric (X, d), unde $X = \mathbb{R}$ şi d este distanţa euclidiană.

Vom considera de asemenea funcţiile continue $f_k : X \to X$, unde $k \in \{1, ..., n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, date de

$$f_k(x) = \{ \begin{array}{cc} 0, & x \in [-\pi, \pi] \\ \sin kx, & x \in \mathbb{R} \setminus [-\pi, \pi] \end{array} .$$

$\mathcal{S} = ((X, d, 1), m, (f_i)_{i \in \{1,..,n\}})$, unde $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, este un sistem iterativ de funcţii constituit din contracţii convexe generalizate al cărui atractor este

$$A_{\mathcal{S}} = \{0\}.$$

CAPITOLUL IV

SISTEME ITERATIVE DE FUNCŢII CONSTITUITE DIN φ-MAX-CONTRACŢII

În acest capitol (care redă conţinutul lucrării [34]), *inspiraţi de ideile din [69], i.e. folosind metoda proiecţiei canonice, unui sistem iterativ de funcţii $\mathcal{S}$ îi asociem un operator $G_{\mathcal{S}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, unde $\mathcal{C}$ reprezintă spaţiul funcţiilor continue de la spaţiul codurilor la spaţiul metric corespunzător sistemului. Demonstrăm că dacă $G_{\mathcal{S}}$ este operator Picard, atunci operatorul fractal asociat lui S este operator Picard şi că $\mathcal{S}$ admite proiecţie canonică. În plus, introducem conceptul de sistem iterativ de funcţii constituit din* φ-max-*contracţii (pe scurt* φ-max-*IFS) şi arătăm că operatorul $G_{\mathcal{S}}$ asociat unui astfel de sistem $\mathcal{S}$ este Picard, deci $\mathcal{S}$ are atractor şi admite proiecţie canonică. Menţionăm că sistemele iterative de funcţii constituite din contracţii Matkowski şi cele constituite din contracţii convexe sunt cazuri particulare de sisteme iterative de funcţii constituite din* φ-max-*contracţii.*

1. Introducere

Importanţa conceptului de spaţiu al codurilor şi al celui de proiecţie canonică asociată unui sistem iterativ de funcţii în descrierea proprietăţilor topologice ale atractorului sistemului a fost subliniată în câteva lucrări precum [11] (care tratează "fractal tops"), [70] (unde sunt tratate aceste concepte asociate unui sistem iterativ de funcţii constituit dintr-o mulţime infinită de elemente) şi [39]. Un loc special în cadrul acestei discuţii îl ocupă lucrarea [69], în cadrul căreia proiecţie canonică de la spaţiul codurilor la atractorul unui sistem iterativ de funcţii (posibil) infinit este prezentată ca un punct fix, în două situaţii: a) funcţiile constitutive ale sistemului sunt uniform Meir-Keeler; b) spaţiul metric asociat sistemului este compact şi sistemul este constituit dintr-o mulţime finită de funcţii.

Ca parte a actualului efort de a extinde teoria clasică a lui Hutchinson cu privire la sistemele iterative de funcţii, în lucrarea [65] s-a introdus conceptul de sistem iterativ de funcţii constituit din contracţii convexe şi s-a dovedit existenţa şi unicitatea atractorului unui astfel de sistem. Pentru o generalizare a acestui rezultat se pot consulta [32] şi [33] (vezi, de asemenea, capitolul anterior).

În acest capitol, folosind metoda proiecţiei canonice, unui sistem iterativ de funcţii $\mathcal{S}$ îi asociem un operator $G_{\mathcal{S}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, unde $\mathcal{C}$ reprezintă spaţiul funcţiilor continue de la spaţiul codurilor la spaţiul metric corespunzător sistemului (vezi Definiţia IV.3.2). Demonstrăm că dacă $G_{\mathcal{S}}$ este operator Picard, atunci operatorul fractal asociat lui $\mathcal{S}$ este operator Picard şi că $\mathcal{S}$ admite proiecţie canonică (vezi Teorema IV.3.5). În plus, introducem conceptul de sistem iterativ de funcţii constituit din φ-max-contracţii (pe scurt φ-max-IFS- vezi Definiţia IV.2.6) şi arătăm că operatorul $G_{\mathcal{S}}$ asociat unui astfel de sistem $\mathcal{S}$ este Picard, deci $\mathcal{S}$ are atractor şi admite proiecţie canonică (vezi Teorema IV.3.6). Menţionăm că sistemele iterative de funcţii constituie din contracţii Matkowski şi cele constituite din contracţii convexe (vezi Definiţa II.20) sunt cazuri particulare de sisteme iterative de funcţii constituite din φ-max-contracţii.

2. Preliminarii

Teorema IV.2.1 (vezi Theorem 3.1 din [66]). *Orice funcţie continuă $f : X \to X$, unde (X, d) este un spaţiu metric complet, pentru care există o funcţie de comparaţie $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ şi $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât*

$$d(f^{[p]}(x), f^{[p]}(y)) \leq \varphi(\max_{j\in\{0,1,2,\ldots,p-1\}} d(f^{[j]}(x), f^{[j]}(y))),$$

pentru orice $x, y \in X$, este operator Picard.

Sisteme iterative de funcţii constituite din φ-max-contracţii

Definiţia IV.2.6. *Un sistem iterativ de funcţii constituit din* φ-max-*contracţii (pe scurt* φ-max-IFS) *este un istem iterativ de funcţii* $\mathcal{S} = ((X, d), (f_i)_{i\in I})$ *cu proprietatea că există o funcţie de comparaţie $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ şi $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât*

$$\max_{\omega\in\Lambda_p(I)} d(f_\omega(x), f_\omega(y)) \leq \varphi(\max_{\omega\in V_p(I)} d(f_\omega(x), f_\omega(y))),$$

pentru orice $x, y \in X$.

Spaţiul metric metric $(\mathcal{C}, d_u)$

Dată o mulţime nevidă finită I şi un spaţiu metric (X, d), vom considera spaţiul metric $(\mathcal{C}, d_u)$, unde

$$\mathcal{C} = \{f : \Lambda(I) \to X \mid f \text{ este continuă}\}$$

şi

$$d_u(f,g) = \sup_{\omega\in\Lambda(I)} d(f(\omega), g(\omega))$$

pentru orice $f, g \in \mathcal{C}$.

Remarca IV.2.10. *Dacă spaţiul metric (X, d) este complet, atunci $(\mathcal{C}, d_u)$ este complet.*

3. Rezultatele principale

În cadrul acestei secţiuni vom considera numai sisteme iterative de funcţii $\mathcal{S} = ((X, d), (f_i)_{i\in I})$ pentru care mulţimea finită I are cel puţin două elemente.

Operatorul $G_{\mathcal{S}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ asociat unui φ-max-IFS $\mathcal{S}$

Dat un sistem iterativ de funcţii $\mathcal{S} = ((X, d), (f_i)_{i\in I})$ şi $g \in \mathcal{C}$, vom considera funcţia $G_{\mathcal{S},g} : \Lambda(I) \to X$ descrisă de

$$G_{\mathcal{S},g}(\omega_1\omega_2...\omega_n...) = (f_{\omega_1} \circ g \circ R)(\omega_1\omega_2...\omega_n...),$$

unde $R : \Lambda(I) \to \Lambda(I)$ este dată de $R(\omega_1\omega_2...\omega_n...) = \omega_2...\omega_n...$ pentru orice $\omega_1\omega_2...\omega_n\omega_{n+1}... \in \Lambda(I)$.

Definiţia IV.3.2. *Operatorul $G_{\mathcal{S}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ asociat unui sistem iterativ de funcţii $\mathcal{S}$ este descris astfel:*

$$G_{\mathcal{S}}(g) = G_{\mathcal{S},g}$$

pentru orice $g \in \mathcal{C}$.

Propoziţia IV.3.4. *Operatorul $G_{\mathcal{S}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ asociat oricărui sistem iterativ de funcţii $\mathcal{S}$ este continuu.*

Teorema IV.3.5. *Dacă operatorul $G_{\mathcal{S}}$ asociat unui sistem iterativ de funcţii $\mathcal{S}$ este operator Picard, atunci operatorul fractal $F_{\mathcal{S}}$ este operator Picard şi $\mathcal{S}$ admite proiecţie canonică.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{S} = ((X, d), (f_i)_{i\in I})$ şi fie $g_0 \in \mathcal{C}$ unicul punct fix al lui $G_{\mathcal{S}}$.

Afirmaţia 1. $g_0(\Lambda(I)) \in P_{cp}(X)$.

Afirmaţia 2. $g_0(\Lambda(I))$ este un punct fix al lui $F_{\mathcal{S}}$.

Afirmaţia 3. $\lim\limits_{n\to\infty} F_{\mathcal{S}}^{[n]}(K) = g_0(\Lambda(I))$ pentru orice $K \in P_{cp}(X)$.

Afirmaţia 4. $g_0(\Lambda(I))$ este unicul punct fix al lui $F_{\mathcal{S}}$.

Afirmaţiile anterioare ne permit să tragem concluzia că $F_{\mathcal{S}}$ este un operator Picard al cărui punct fix este $g_0(\Lambda(I))$.

În final se constată că funcţia continuă şi surjectivă $g_0 : \Lambda(I) \to g_0(\Lambda(I)) = A_{\mathcal{S}}$ este proiecţia canonică de la $\Lambda(I)$ la $A_{\mathcal{S}}$, deci $\mathcal{S}$ admite proiecţie canonică. $\square$

Teorema IV.3.6. *Operatorul $G_{\mathcal{S}}$ asociat unui φ-max-IFS $\mathcal{S}$ este operator Picard. În particular, $\mathcal{S}$ are atractor şi admite proiecţie canonică.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{S} = (X, (f_i)_{i\in I})$.

Se poate arăta că

$$d_u(G_{\mathcal{S}}^{[p]}(g), G_{\mathcal{S}}^{[p]}(h)) \leq \varphi(\max_{j\in\{0,1,\ldots,p-1\}} d_u(G_{\mathcal{S}}^{[j]}(g), G_{\mathcal{S}}^{[j]}(h))), \tag{1}$$

pentru orice $g, h \in \mathcal{C}$, unde φ şi p sunt descrise în Definiţia IV.2.6.

Având în vedere Remarca IV.2.10, Propoziţia IV.3.4 şi (1), Teorema IV.2.1 ne ajută să concluzionăm că $G_{\mathcal{S}}$ este operator Picard. $\square$

Un exemplu

Să considerăm spaţiul metric complet (X, d), unde

$$X = [0,1] \times \{0,1\} \text{ şi } d((x,i),(y,j)) = |x-y| + \alpha_{ij},$$

pentru orice $x, y \in [0,1]$ şi orice $i, j \in \{0,1\}$, cu $\alpha_{00} = \alpha_{11} = 0$ şi $\alpha_{10} = \alpha_{01} = 10$.

Să considerăm de asemenea funcţiile continue $f_i : X \to X$ date astfel:

$$f_i(x,j) = \left\{ \begin{array}{ll} (x,0), & j=1 \\ (\frac{x+i}{2},0), & j=0 \end{array} \right.$$

pentru orice $x \in [0,1]$ şi orice $i, j \in \{0,1\}$.

$\mathcal{S}$ este un φ-max IFS ale cărui funcţii constitutive nu sunt contracţii Matkowski.

Remarcăm că *atractorul lui $\mathcal{S}$ este* $[0,1] \times \{0\}$.

CAPITOLUL V

MĂSURI INVARIANTE ALE OPERATORILOR MARKOV ASOCIAŢI SISTEMELOR ITERATIVE DE FUNCŢII, CU PROBABILITĂŢI ŞI CONSTITUITE DIN φ-MAX-CONTRACŢII

În acest capitol (care oglindeşte conţinutul articolului [35]), *demonstrăm că operatorul Markov asociat unui sistem iterativ de funcţii, cu probabilităţi şi constituit din φ-max-contracţii, are o unică măsură invariantă al cărei suport este atractorul sistemului.*

1. Introducere

Sistemele iterative de funcţii cu probabilităţi sunt bine cunoscute pentru aplicaţiile lor în compresia imaginilor (vezi [12], [13], [30] şi [31]).

Problema existenţei şi unicităţii măsurii invariante a operatorilor de tip Markov asociaţi sistemelor iterative de funcţii cu probabilităţi, care a fost iniţată de J. Hutchinson (vezi [41]), a fost tratată şi în contexte mai largi (vezi [23], [57], [61], [63], [71], [77], [92] şi [101]).

Vom studia în acest capitol operatorul Markov asociat unui sistem iterativ de funcţii, cu probabilităţi şi constituit din φ-max-contracţii. Mai precis, vom arăta că un astfel de operator are o unică măsură invariantă al cărei suport este atractorul sistemului. Menţionăm că măsura invariantă este obţinută prin utilizarea teoremei de reprezentare a lui Riesz, în contrast cu metoda clasică (datorată lui Hutchinson) care constă în utilizarea unei teoreme adecvate de punct fix pentru operatorul Markov (vezi [41]).

2. Preliminarii

Metrica Hutchinson

Definiţia V.2.1. *Dat un spaţiu metric (X, d), funcţia $d_H : \mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}(X) \to [0, \infty)$ descrisă de*

$$d_H(\mu, \nu) = \sup_{f \in Lip_1(X,\mathbb{R})} \left| \int_X f d\mu - \int_X f d\nu \right|,$$

pentru orice $\mu, \nu \in \mathcal{M}(X)$, se dovedeşte a fi o metrică care poartă numele de metrica Hutchinson.

Operatorul Markov asociat unui sistem iterativ de funcţii, cu probabilităţi şi constituit din φ-max-contracţii

Definiţia V.2.3. *Un sistem iterativ de funcţii, cu probabilităţi şi constituit din* φ-max-*contracţii* (pe scurt φ-max-IFSp), *este un* φ-max-*IFS* $\mathcal{S} = ((X,d),(f_i)_{i\in\{1,...,m\}})$ *înzestrat cu un sistem de probabilităţi* $(p_i)_{i\in\{1,...,m\}}$, *i.e.* $p_i \in (0,1)$ *pentru orice* $i \in \{1,...,m\}$ *şi* $p_1 + ... + p_m = 1$.

Vom nota un astfel de sistem în modul următor:

$$\mathcal{S} = ((X,d),(f_i)_{i\in\{1,...,m\}},(p_i)_{i\in\{1,...,m\}}).$$

Unui astfel de sistem i se poate asocia *operatorul Markov*

$$M_{\mathcal{S}} : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(X),$$

dat de

$$M_{\mathcal{S}}(\mu) = p_1\mu \circ f_1^{-1} + ... + p_m\mu \circ f_m^{-1},$$

i.e.

$$M_{\mathcal{S}}(\mu)(B) = p_1\mu(f_1^{-1}(B)) + ... + p_m\mu(f_m^{-1}(B)),$$

pentru orice $B \in \mathcal{B}(X)$ şi orice $\mu \in \mathcal{M}(X)$.

Un punct fix al lui $M_{\mathcal{S}}$ se numeşte *măsură invariantă* asociată lui $\mathcal{S}$.

3. Rezultatele principale

Principalul rezultat afirmă că operatorul Markov asociat unui φ-max-IFSp este operator Picard şi suportul punctului său fix este atractorul sistemului. Pentru început, se consideră cazul în care spaţiul metric asociat sistemului este compact (vezi Teorema V.3.9), iar ulterior cazul general (vezi Teorema V.3.18). În cadrul acestei secţiuni vom considera numai φ-max-IFS-uri $\mathcal{S} = ((X,d),(f_i)_{i\in\{1,...,m\}},(p_i)_{i\in\{1,...,m\}})$ pentru care $m \geq 2$.

A. Cazul φ-max-IFSp-urilor pentru care spaţiul metric asociat sistemului este compact

Propoziţia V.3.7. *Pentru orice* φ-max-*IFSp* $\mathcal{S} = ((X,d),(f_i)_{i\in\{1,...,m\}},(p_i)_{i\in\{1,...,m\}})$, *cu* (X,d) *compact, şi* $g : X \to \mathbb{R}$ *continuă, există o funcţie constantă*

$c_g : X \to \mathbb{R}$ *astfel încât* $B_{\mathcal{S}}^{[n]}(g) \underset{n\to\infty}{\overset{u}{\longrightarrow}} c_g$ (aici $\overset{u}{\to}$ semnifică convergenţa uniformă), *unde*

$$B_{\mathcal{S}}(g) \overset{\text{not}}{=} p_1 g \circ f_1 + ... + p_m g \circ f_m$$

Demonstraţie. Justificarea acestei propoziţii va fi împărţită în trei paşi.

Pasul 1. *Şirul* $(\sup\limits_{x\in X} B_{\mathcal{S}}^{[n]}(g)(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este descrescător şi şirul* $(\inf\limits_{x\in X} B_{\mathcal{S}}^{[n]}(g)(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este crescător.*

Pasul 2. *Şirurile* $(\inf\limits_{x\in X} B_{\mathcal{S}}^{[n]}(g)(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *şi* $(\sup\limits_{x\in X} B_{\mathcal{S}}^{[n]}(g)(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sunt convergente şi au aceeaşi limită (care va fi notată cu* c_g*).*

Pasul 3. *Există o funcţie constantă* $c_g : X \to \mathbb{R}$ *astfel încât* $B_{\mathcal{S}}^{[n]}(g) \underset{n\to\infty}{\overset{u}{\longrightarrow}} c_g$. □

Propoziţia V.3.8. *Pentru orice* φ-max-*IFSp* $\mathcal{S} = ((X,d),(f_i)_{i\in\{1,...,m\}},(p_i)_{i\in\{1,...,m\}})$, *cu* (X,d) *compact, există o unică măsură Boreliană pozitivă* $\mu_{\mathcal{S}}$ *pe* X *astfel încât*

$$c_g = \int_X g d\mu_{\mathcal{S}},$$

pentru orice funcţie continuă $g : X \to \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Vom considera funcţionala liniară şi pozitivă $I : \mathcal{C}(X) \to \mathbb{R}$ dată de

$$I(g) = c_g$$

pentru orice $g \in \mathcal{C}(X)$.

Atunci, în conformitate cu teorema lui Riesz, concluzionăm că există o unică măsură Boreliană pozitivă $\mu_{\mathcal{S}}$ pe X astfel încât $c_g = \int_X g d\mu_{\mathcal{S}}$ pentru orice $g \in \mathcal{C}(X)$. □

Teorema V.3.9. *Pentru orice* φ-max-*IFSp* $\mathcal{S} = ((X,d),(f_i)_{i\in\{1,...,m\}},(p_i)_{i\in\{1,...,m\}})$, *cu* (X,d) *compact, operatorul Markov* $M_{\mathcal{S}} : (\mathcal{M}(X), d_H) \to (\mathcal{M}(X), d_H)$ *este operator Picard şi suportul punctului său fix este* $A_{\mathcal{S}}$.

Demonstraţie.

Justificarea acestei teoreme va fi împărţită în trei paşi.

Pasul 1. *Măsura* $\mu_{\mathcal{S}}$, *a cărei existenţă este asigurată de Propoziţia V.3.8, este un element al lui* $\mathcal{M}(X)$.

Pasul 2. *Măsura* $\mu_{\mathcal{S}} \in \mathcal{M}(X)$, *a cărei existenţă este asigurată de Propoziţia 3.8, este unicul punct fix al lui* $M_{\mathcal{S}}$ *şi* $\operatorname{supp} \mu_{\mathcal{S}} = A_{\mathcal{S}}$.

Pasul 3. $\lim\limits_{n \to \infty} M_{\mathcal{S}}^{[n]}(\nu) = \mu_{\mathcal{S}}$ *pentru orice* $\nu \in \mathcal{M}(X)$.

Ultimii doi paşi ne asigură că $M_{\mathcal{S}}$ este operator Picard. În plus, pasul 2 justifică faptul că suportul punctului fix al lui $M_{\mathcal{S}}$ aste atractorul lui $\mathcal{S}$. □

B. Cazul unui φ-max**-IFSp general**

Pentru un spaţiu metric complet (X, d) şi pentru o submulţime compactă Y a lui X, vom considera funcţia $i_Y : \mathcal{M}(Y) \to \mathcal{M}(X)$ dată de

$$i_Y(\mu)(B) = \mu(Y \cap B),$$

pentru orice $\mu \in \mathcal{M}(Y)$ şi orice $B \in \mathcal{B}(X)$

Având în vedere că, dat un φ-max-IFSp $\mathcal{S} = ((X, d), (f_i)_{i \in \{1,...,m\}}, (p_i)_{i \in \{1,...,m\}})$, avem

$$f_i(A_{\mathcal{S}}) \subseteq A_{\mathcal{S}},$$

pentru orice $i \in \{1, ..., m\}$, putem considera φ-max-IFSp-ul

$$\mathcal{S}_{A_{\mathcal{S}}} = ((A_{\mathcal{S}}, d), (\phi_i)_{i \in \{1,...,m\}}, (p_i)_{i \in \{1,...,m\}}),$$

unde

$$\phi_i(x) = f_i(x),$$

pentru orice $x \in A_{\mathcal{S}}$ şi orice $i \in \{1, ..., m\}$.

Putem de asemenea considera operatoriul Markov $M_{\mathcal{S}}^{A_{\mathcal{S}}} : \mathcal{M}(A_{\mathcal{S}}) \to \mathcal{M}(A_{\mathcal{S}})$ asociat lui $\mathcal{S}_{A_{\mathcal{S}}}$. Având în vedere Teorema V.3.9, acesta este operator Picard şi vom nota punctul fix al său cu $\mu_{\mathcal{S}}^{A_{\mathcal{S}}}$.

Propoziţie V.3.13. *Operatorul Markov* $M_{\mathcal{S}}$ *asociat unui* φ-max-*IFSp* $\mathcal{S} = ((X, d), (f_i)_{i \in \{1,...,m\}}, (p_i)_{i \in \{1,...,m\}})$ *are un unic punct fix (notat cu* $\mu_{\mathcal{S}}$*) al cărui suport este* $A_{\mathcal{S}}$.

Demonstraţie.

Afirmaţia 1. $i_{A_{\mathcal{S}}}(\mu_{\mathcal{S}}^{A_{\mathcal{S}}}) \overset{not}{=} \mu_{\mathcal{S}} \in \mathcal{M}(X)$ este punct fix al lui $M_{\mathcal{S}}$.

Afirmaţia 2. $\mu_{\mathcal{S}}$ este unicul punct fix al lui $M_{\mathcal{S}}$.

Justificarea afirmaţiei anterioare, include şi faptul că

$$\text{supp } \mu_{\mathcal{S}} = A_{\mathcal{S}}. \ \Box$$

Propoziţia V.3.17. *Dat un* φ-max-*IFSp* $\mathcal{S} = ((X,d),(f_i)_{i\in\{1,...,m\}},(p_i)_{i\in\{1,...,m\}})$, *avem*

$$\lim_{n\to\infty} d_H(M_{\mathcal{S}}^{[n]}(\nu),\mu_{\mathcal{S}}) = 0,$$

pentru orice $\nu \in \mathcal{M}(X)$.

Combinând Propoziţiile V.3.13 şi V.3.17, obţinem următoarea:

Teorema V.3.18. *Pentru orice* φ-max-*IFSp* $\mathcal{S} = ((X,d),(f_i)_{i\in\{1,...,m\}},(p_i)_{i\in\{1,...,m\}})$ *operatorul Markov* $M_{\mathcal{S}} : (\mathcal{M}(X), d_H) \to (\mathcal{M}(X), d_H)$ *este operator Picard şi suportul punctului său fix este* $A_{\mathcal{S}}$

Un exemplu

Să considerăm φ-max IFSp-ul $\mathcal{S} = ((X,d),(f_i)_{i\in\{1,2\}},(p_i)_{i\in\{1,2\}})$, unde:
- $X = [0,1] \times \{0,1\}$;
-

$$d((x,i),(y,j)) = |x-y| + \alpha_{ij},$$

pentru orice $x, y \in [0,1]$ şi orice $i, j \in \{0,1\}$, cu $\alpha_{00} = \alpha_{11} = 0$ şi $\alpha_{10} = \alpha_{01} = 10$;

- funcţiile continue $f_i : X \to X$ sunt date astfel:

$$f_i(x,j) = \{ \begin{array}{ll} (x,0), & j=1 \\ (\frac{x+i}{2},0), & j=0 \end{array}$$

pentru orice $x \in [0,1]$ şi orice $i, j \in \{0,1\}$;

- $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$.

Atunci măsura invariantă μ asociată lui $\mathcal{S}$ este descrisă astfel:

$$\mu(B) = \lambda(i^{-1}(B)),$$

pentru orice $B \in \mathcal{B}(X)$, unde $i : [0,1] \to X$ este dată de

$$i(x) = (x,0),$$

pentru orice $x \in [0,1]$ şi λ este măsura Lebesgue pe $[0,1]$.

BIBLIOGRAFIE

[1] A. Aghajani, M. Abbas şi J.R. Roshan, Common fixed point of generalized weak contractive mappings in partially ordered b-metric spaces, Math. Slovaca, **64** (2014), 941-960.

[2] M.A. Alghamdia, S.H. Alnafeia, S. Radenović şi N. Shahzad, Fixed point theorems for convex contraction mappings on cone metric spaces, Math. Comput. Modelling, **54** (2011), 2020–2026.

[3] T.V. An, L.Q. Tuyen şi N.V. Dung, Stone-type theorem on b-metric spaces and applications, Topology Appl., **185/186** (2015), 50-64.

[4] Sz. András, Fiber Picard operators and convex contractions, Fixed Point Theory, **4** (2003), 121–129.

[5] Sz. András, Ecuaţii integrale Fredholm-Volterra, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 2005.

[6] J. Andres şi M. Rypka, Multivalued fractals and hyperfractals, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., **22** (2012), DOI 10.1142/S02181127412500095.

[7] H. Aydi, M.F. Bota, E. Karapinar şi S. Mitrović, A fixed point theorem for set-valued quasi-contractions in b-metric spaces, Fixed Point Theory Appl., 2012, 2012:88.

[8] I.A. Bakhtin, The contraction mapping principle in quasimetric spaces, Funct. Anal., Ulianowsk Gos. Ped. Inst., **30** (1989), 26-37.

[9] T. Banakh şi M. Nowak, A 1-dimensional Peano continuum which is not an IFS attractor, Proc. Amer. Math. Soc., **141** (2013), 931-935.

[10] M. Barnsley, Fractals everywhere, Academic Press, Boston, 1988.

[11] M. Barnsley, Transformation between attractors of hyperbolic iterated function systems (2007), arXiv:math/0703398v1.

[12] M. Barnsley, S.G. Demko, J.H. Elton şi J.S. Geromino, Invariant measures for Markov processes arising from iterated function systems with place-dependent probabilities, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., **24** (1988), 367–394 şi **25** (1989), 589–590.

[13] M.F. Barnsley şi J.H. Elton, A new class of Markov processes for image encoding, Adv. in Appl. Prob., **20** (1988), 14–32.

[14] V. Berinde, Generalized contractions in quasimetric spaces, Seminar on Fixed Point Theory, 1993, 3-9.

[15] D. Bessis, J. Geronimo şi P. Moussa, Function weighted measures and orthogonal polynomials on Julia sets, Const. Approx., **4** (1988), 157-173.

[16] M. Boriceanu, M. Bota şi A. Petruşel, Multivalued fractals in b-metric spaces, Cent. Eur. J. Math., **8** (2010), 367-377.

[17] M. Boriceanu, A. Petruşel şi A.I. Rus, Fixed point theorems for some multivalued generalized contraction in b-metric spaces, Int. J. Math. Stat., **6** (2010), 65-76.

[18] M. Bota, A. Molnár şi C. Varga, On Ekeland's variational principle in b-metric spaces, Fixed Point Theory, **12** (2011), 21-28.

[19] K. Brucks şi H. Bruin, Topics from one-dimensional dynamics, Cambridge University Press, 2004.

[20] R.R. Bush şi F. Mosteller, A stochastic model with applications to learning, Ann. Math. Stat., **24** (1953), 449–585.

[21] C. Chifu şi A. Petruşel, Multivalued fractals and generalized multivalued contractions, Chaos Solitons Fractals, **36** (2008), 203-210.

[22] C. Chifu şi G. Petruşel, Fixed points for multivalued contractions in b-metric spaces with applications to fractals, Taiwanese J. Math., **18** (2014), 1365-1375.

[23] I. Chiţescu şi L. Niţă, Fractal vector measures, Sci. Bull., Ser. A, Appl. Math. Phys., Politeh. Univ. Buchar., **77** (2015), 219-228.

[24] S. Crovisier şi M. Rams, IFS attractors and Cantor sets, Topology Appl., **153** (2006), 1849-1859.

[25] S. Czerwik, Contraction mappings in b-metric spaces, Acta Math. Inform. Univ. Ostraviensis, **1** (1993), 5-11.

[26] S. Czerwik, Nonlinear set-valued contraction mappings in b-metric spaces, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **46** (1998), 263-276.

[27] E. D'Aniello şi T.H. Steele, Attractors for iterated function systems, J. Fractal Geom., **3** (2016), 95-117.

[28] A.K. Dubey, R. Shukla şi R.P. Dubey, Some fixed point results in b-metric spaces, Asian Journal of Mathematics and Applications, 2014, Article ID ama0147.

[29] D. Dumitru, Generalized iterated function systems containing Meir-Keeler functions, An. Univ. Bucur., Mat., **58** (2009), 109-121.

[30] J.H. Elton, An ergodic theorem for iterated maps, Ergod. Theory Dynam. Systems, **7** (1987), 481–488.

[31] Y. Fisher, Fractal Image Compression; Theory and Application, Springer-Verlag, New York, 1995.

[32] **F. Georgescu**, IFSs consisting of generalized convex contractions, An. Ştiinţ. Univ. "Ovidius" Constanţa, Ser. Mat., **25** (2017), 77-86.

[33] **F. Georgescu**, Iterated function systems consisting of generalized convex contractions in the framework of complete strong b-metric spaces, An. Univ. Vest Timiş., Ser. Mat.-Inform., **55** (2017), 119-142.

[34] **F. Georgescu**, R. Miculescu şi A. Mihail, A study of the attractor of a φ-max-IFS via a relatively new method, J. Fixed Point Theory Appl., (2018) 20:24.

[35] **F. Georgescu**, R. Miculescu şi A. Mihail, Invariant measures of Markov operators associated to iterated function systems consisting of phi-max-contractions with probabilities, Indagat. Math., **30** (2019), 214-226.

[36] V. Ghorbanian, S. Rezapour şi N. Shahzad, Some ordered fixed point results and the property (P), Comput. Math. Appl., **63** (2012), 1361-1368.

[37] G. Gwóźdź-Łukowska şi J. Jachymski, IFS on a metric space with a graph structure and extensions of the Kelisky-Rivlin theorem, J. Math. Anal. Appl., **356** (2009), 453-463.

[38] M. Hata, On the structure of self-similar sets, Japan. J. Appl. Math., **2** (1985), 381-414.

[39] M.R. Hille, Remarks on limit sets of infinite iterated function systems, Monatsh. Math., **168** (2012), 215–237.

[40] N. Hussain, M.A. Kutbi, S. Khaleghizadeh şi P. Salimi, Discussions on recent results for α–Ψ-contractive mappings, Abstr. Appl. Anal., vol. 2014, Article ID 456482, 13 pages, 2014.

[41] J.E. Hutchinson, Fractals and self similarity, Indiana Univ. Math. J., **30** (1981), 713–747.

[42] L. Ioana şi A. Mihail, Iterated function systems consisting of φ-contractions, Results Math., **72** (2017), 2203-2225.

[43] V. Istrăţescu, Some fixed point theorems for convex contraction mappings and convex nonexpansive mappings (I), Libertas Math., **1** (1981), 151-164.

[44] V. Istrăţescu, Some fixed point theorems for convex contraction mappings and mappings with convex diminishing diameters - I, Annali di Mat. Pura Appl., **130** (1982), 89–104.

[45] V. Istrăţescu, Some fixed point theorems for convex contraction mappings and mappings with convex diminishing diameters, II, Annali di Mat. Pura Appl., **134** (1983), 327-362.

[46] J. Jaroszewska, Iterated function systems with continuous place dependent probabilities, Univ. Iagell. Acta Math., **40** (2002), 137-146.

[47] S. Karlin, Some random walks arising in learning models, Pacific J. Math., **3** (1953), 725-756.

[48] M.A. Khamsi şi N. Hussain, KKM mappings in metric type spaces, Nonlinear Anal., **73** (2010), 3123-3129.

[49] M. Kir şi H. Kizitune, On some well known fixed point theorems in b-metric spaces, Turkish Journal of Analysis and Number Theory, **1** (2013), 13-16.

[50] W.A. Kirk şi N. Shahzad, Fixed Point Theory in Distance Spaces, Springer Heidelberg, 2014.

[51] M. Klimek şi M. Kosek, Generalized iterated function systems, multifunctions and Cantor sets, Ann. Polon. Math., **96** (2009), 25-41.

[52] M. Kulczycki şi M. Nowak, A class of continua that are not attractors of any IFS, Cent. Eur. J. Math., **10** (2012), 2073-2076.

[53] M.A. Kutbi, E. Karapinar, J. Ahmad şi A. Azam, Some fixed point results for multi-valued mappings in b-metric spaces, J. Inequal. Appl, vol. 2014, article ID 126, 2014.

[54] M. Kwieciński, A locally connected continuum which is not an IFS attractor, Bull. Polish. Acad. Sci., **47** (1999), 128-132.

[55] A. Latif, W. Sintunavarat şi A. Ninsri, Approximate fixed point theorems for partial generalized convex contraction mappings in α-complete metric spaces, Taiwanese J. Math., **19** (2015), 315-333.

[56] K. Leśniak, Infinite iterated function systems: a multivalued approach, Bull. Pol. Acad. Sci. Math., **52** (2004), 1-8.

[57] M.V. Marchi, Invariant measures in quasi-metric spaces, Z. Anal. Anwend., **22** (2003), 17–32.

[58] L. Máté, The Hutchinson-Barnsley theory for certain noncontraction mappings, Period. Math. Hungar., **27** (1993), 21-33.

[59] J. Matkowski, Integrable solutions of functional equations, Dissertationes Math., **127** (1975), 68 pp.

[60] E.J. McShane, Extension of range of functions, Bull. Amer. Math. Soc., **40** (1934), 837-842.

[61] F. Mendivil, A generalization of IFS with probabilities to infinitely many maps, Rocky Mt. J. Math., **28** (1998), 1043–1051.

[62] M.A. Miandaragh, M. Postolache şi S. Rezapour, Approximate fixed points of generalized convex contractions, Fixed Point Theory Appl., vol. 2013, article 255, 2013.

[63] R. Miculescu, Generalized iterated function systems with place dependent probabilities, Acta Appl. Math., **130** (2014), 135–150.

[64] R. Miculescu şi A. Mihail, Reich-type iterated function systems, J. Fixed Point Theory Appl., **18** (2016), 285-296.

[65] R. Miculescu şi A. Mihail, A generalization of Istrăţescu's fixed point theorem for convex contractions, Fixed Point Theory, **18** (2017), 689-702.

[66] R. Miculescu şi A. Mihail, A generalization of Matkowski's fixed point theorem and Istrăţescu's fixed point theorem concerning convex contractions, J. Fixed Point Theory Appl., **19** (2017), 1525-1533.

[67] R. Miculescu şi A. Mihail, Caristi-Kirk type and Boyd&Wong–Browder-Matkowski-Rus type fixed point results in b-metric spaces, Filomat, **31** (2017), 4331-4340.

[68] R. Miculescu şi S. Urziceanu, The canonical projection associated with certain possibly infinite generalized iterated function systems as a fixed point, J. Fixed Point Theory Appl., (2018), 20:141.

[69] A. Mihail, The canonical projection between the shift space of an IIFS and its attractor as a fixed point, Fixed Point Theory Appl., 2015, Paper No. 75, 15 p.

[70] A. Mihail şi R. Miculescu, The shift space for an infinite iterated function system, Math. Rep., **61** (2009), 21-32.

[71] A. Mihail şi R. Miculescu, A generalization of the Hutchinson measure, Mediterr. J. Math., **6** (2009), 203–213.

[72] A. Mihail şi R. Miculescu, Applications of fixed point theorems in the theory of generalized IFS, Fixed Point Theory Appl., 2008, Art. ID 312876, 11 pp.

[73] A. Mihail şi R. Miculescu, Generalized IFSs on noncompact spaces, Fixed Point Theory Appl., 2010, Art. ID 584215, 15 pp.

[74] P.K. Mishra, S. Sachdeva şi S.K. Banerjee, Some fixed point theorems in b-metric space, Turkish Journal of Analysis and Number Theory, **2** (2014), 19-22.

[75] S.K. Mohanta, Some fixed point theorems using wt-distance in b-metric spaces, Fasc. Math., **54** (2015), 125-140.

[76] P. Moran, Additive functions on intervals and Hausdorff measure, Proc. Camb. Phil. Soc., **42** (1946), 15-23.

[77] U. Mosco, Self-similar measures in quasi-metric spaces. In: Festschrift Dedicated to Alfonso Vignoli on the Occasion of His 60th Birthday. Prog. Nonlinear Differ. Equ. Appl., vol. 40, pp. 233–248. Birkhäuser, Basel, 2000.

[78] J.R. Munkres, Topology, 2nd edition, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ (2000).

[79] V. Mureşan şi A. Mureşan, On the theory of fixed point theorems for convex contraction mappings, Carpathian J. Math., **31** (2015), 365-371.

[80] H.N. Nashine şi Z. Kadelburg, Cyclic generalized φ-contractions in b-metric spaces and an application to integral equations, Filomat, **28** (2014), 2047-2057.

[81] T. Nazir, S. Silvestrov şi Xiaomin Qi, Fractals of generalized F-Hutchinson operator in b-metric spaces, J. Oper., vol. 2016, article ID 5250394, 2016.

[82] M.O. Olatinwo, A fixed point theorem for multi-valued weakly Picard operators in b-metric spaces, Demonstratio Math., **42** (2009), 599-606.

[83] O. Onicescu şi G. Mihoc, Sur les chaînes de variables statisques, Bull. Soc. Math. de France, **59** (1935), 174-192.

[84] M. Păcurar, Sequences of almost contractions and fixed points in b-metric spaces, An. Univ. Vest Timiş. Ser. Mat.-Inform., **48** (2010), 125-137.

[85] A. Petruşel, Iterated function systems of locally contractive operators, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., **33** (2004), 215-219.

[86] J.R. Roshan, N. Hussain, S. Sedghi şi N. Shobkolaei, Suzuki-type fixed point results in b-metric spaces, Math. Sci. (Springer), **9** (2015), 153–160.

[87] J.R. Roshan, V. Parvaneh şi I. Altun, Some coincidence point results in ordered b-metric spaces and applications in a system of integral equations, Appl. Math. Comput., **226** (2014), 725–737.

[88] M.J. Sanders, An n-cell in $\mathbb{R}^{n+1}$ that is not the attractor of any IFS on $\mathbb{R}^{n+1}$, Missouri J. Math. Sci, **21** (2009), 13-20.

[89] M. Sarwar şi M.U. Rahman, Fixed point theorems for Ciric's and generalized contractions in b-metric spaces, International Journal of Analysis şi Applications, **7** (2015), 70-78.

[90] N.A. Secelean, Countable Iterated Function Systems, Lambert Academic Publishing, 2013.

[91] N.A. Secelean, Iterated function systems consisting of F-contractions, Fixed Point Theory Appl., 2013, 2013:277.

[92] N.A. Secelean, Invariant measure associated with a generalized countable iterated function system, Mediterr. J. Math., **11** (2014), 361-372.

[93] N.A. Secelean, Generalized iterated function systems on the space $l^\infty(X)$, J. Math. Anal. Appl., **410** (2014), 847-458.

[94] Y. Shiota, Remarks on self-similarity, Japan. J. Appl. Math., **7** (1990), 171-181.

[95] S. Shukla, Partial b-metric spaces and fixed point theorems, Mediterr. J. Math., **11** (2014), 703-711.

[96] S.L. Singh, S. Czerwik, K. Król şi A. Singh, Coincidences and fixed points of hybrid contractions, Tamsui Oxf. J. Math. Sci., **24** (2008), 401-416.

[97] L. L. Stacho şi L.I. Szabo, A note on invariants of iterated function systems, Acta Math. Hungar., **119** (2008), 159-164.

[98] F. Strobin, Attractors of generalized IFSs that are not attractors of IFSs, J. Math. Anal. Appl., **422** (2015), 99-108.

[99] F. Strobin şi J. Swaczyna, On a certain generalization of the iterated function systems, Bull. Australian Math. Soc., **87** (2013), 37-54.

[100] D. Wardowski, Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces, Fixed Point Theory Appl. 87, 2012/1/94 (2012). doi:10.1186/1687-1812-2012-94.

[101] I. Werner, Contractive Markov systems, J. Lond. Math. Soc., **71** (2005), 236-258.

[102] S. Willard, General topology, Addison-Wesley Publishing Company, 1970.

[103] R.F. Williams, Composition of contractions, Bol. Soc. Brasil. Mat., **2** (1971), 55-59.

[104] H. Yingtaweesittikul, Suzuki type fixed point for generalized multi-valued mappings in b-metric spaces, Fixed Point Theory Appl., 2013, 2013:215.