UNIVERSITATEA DIN PITEŞTI

ŞCOALA DOCTORALĂ DE MATEMATICĂ

SISTEME ITERATIVE DE FUNCŢII, GENERALIZATE ŞI POSIBIL INFINITE

TEZĂ DE DOCTORAT

REZUMAT

Conducător ştiinţific
Lector. univ. dr. habil. Alexandru MIHAIL

Doctorand
Silviu-Aurelian URZICEANU

2019

CUPRINS

INTRODUCERE

Teoria mulţimilor fractale reprezintă o ramură modernă a analizei matematice care se află în plină dezvoltare şi care are puternice legături cu multe alte domenii ale matematicii, precum topologia (vezi [12]), teoria măsurii (vezi [14]) şi analiza reală. Conceptul de mulţime fractală, introdus de B. Mandelbrot (vezi [30] şi [31]), descrie o mulţime cu dimensiunea Hausdorff neîntreagă. Astfel de mulţimi au un aspect grafic frânt, cu variaţii bruşte, care le şi dă numele şi care le diferenţiază net de curbele şi suprafeţele de clasă $\mathcal{C}^1$. Pe de o parte, printre exemplele clasice de mulţimi fractale putem aminti mulţimea triadică a lui Cantor şi curba lui Koch, pe de altă parte, există anumite funcţii ale căror grafice reprezintă mulţimi fractale dintre care amintim funcţia lui Weierstrass şi pe cea a lui Lebesgue.

Un pas important în dezvoltarea teoriei mulţimilor fractale l-a constituit articolul [20] având-ul drept autor pe John E. Hutchinson, care a introdus conceptul de atractor al unui sistem iterativ de funcţii (pe scurt IFS). În plus, un astfel de atractor (numit şi fractal Hutchinson-Barnsley) este autosimilar, adică părţi ale mulţimii sunt asemenea cu întreaga mulţime. Cel care a contribuit din plin la popularizarea acestei teorii (prin rafinarea studiilor lui P. Moran -vezi [55]-) este M. Barnsley (vezi [2] şi [3]).

Există mai multe direcţii de generalizare ale notiunii de IFS. Un rol aparte, din punctul de vedere al prezentei lucrări îl joacă conceptul (introdus de R. Miculescu şi A. Mihail - [51] şi [54]) de sistem iterativ de funcţii generalizat (pe scurt GIFS). Dacă în cazul teoriei lui Hutchinson se consideră contracţii din spaţiul metric complet X în el însuşi, în cazul sistemelor iterative de funcţii generalizate se au în vedere contracţii definite pe X^m cu valori în X, unde $m \in \mathbb{N}^*$ poartă numele de ordinul sistemului. F. Strobin (vezi [72]) a demonstrat că pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$, există o submulţime a planului care este atractorul unui GIFS de ordin m, dar pentru care nu există nici un GIFS de ordin $m-1$ al cărui atractor să fie această submulţime. Acest lucru dovedeşte că puterea de descriere a mulţimilor fractale de tip Hutchinson-Barsley sporeşte prin utilizarea GIFS-urilor. De asemenea rezultatele [32] şi [55] marchează o altă diferenţă calitativă între cele două noţiuni. Diferitele generalizări ale noţiunii de GIFS se pot găsi în [6], [7], [58], [71] şi [73]. Mai mult, măsura Hutchinson asociată unui sistem iterativ de funcţii generalizat a fost studiată în [36], [37], [52], [57] şi [70].

Motivaţia alegerii temei prezentei teze este dată de faptul că studiul sistemelor iterative de funcţii, generalizate şi posibil infinite, se înscrie în efortul actual de generalizare a teoriei mulţimilor fractale de tip Hutchinson-Barnsley.

Lucrarea este structurată în patru capitole. Primul capitol conţine o trecere în revistă a principalelor elemente folosite în lucrare. Mai precis, se prezintă spaţiul codurilor generalizat, compunerea generalizată a funcţiilor, spaţiul metric $(X^m, d_{\max})$, consideraţii privind punctele fixe ale funcţiilor $f : X^m \to X$, pseudo-metrica Hausdorff-Pompeiu, precum şi conceptul de sistem iterativ de funcţii, generalizat şi posibil infinit (notat, pe scurt, GIIFS).

Pe de o parte, reamintim că o direcţie de extindere a teoriei clasice a lui Hutchinson privind sistemele iterative de funcţii a fost dezvoltată de R. Miculescu şi A. Mihail prin introducerea şi studierea sistemelor iterative de funcţii generalizate - pe scurt GIFS-uri- (vezi [51] şi [54]). Pe de altă parte, reamintim că în lucrarea [50] proiecţia canonică asociată unui sistem iterativ de funcţii (posibil) infinit este prezentată ca un punct fix, în două situaţii: a) funcţiile constitutive ale sistemului sunt uniform Meir-Keeler; b) spaţiul metric asociat sistemului este compact şi sistemul este constituit dintr-o mulţime finită de funcţii. În cel de al doilea capitol (care reflectă conţinutul articolelor [47] şi [77]) combinăm aceste două direcţii de cercetare prin studierea sistemelor iterative de funcţii, generalizate şi posibil infinite, constituite din generalizări ale φ-contracţiilor. Mai precis, dat un sistem iterativ de funcţii, generalizat şi posibil infinit $\mathcal{S} = ((X, d), (f_i)_{i \in I})$, de ordin m, construim un operator $H_{\mathcal{S}} : \mathcal{C}^m \to \mathcal{C}$, unde $\mathcal{C} = \{f : \Omega \to X \mid f \text{ este continuă şi mărginită}\}$ care se înzestrează cu metrica uniformă, iar Ω reprezintă spaţiul codurilor generalizat. În continuare se prezintă unele rezultate care furnizează condiţii suficiente (asupra funcţiilor constitutive ale sistemului) pentru ca operatorul $H_{\mathcal{S}}$ să fie continuu, contracţie, φ-contracţie, Meir-Keeler, contractiv sau φ-max-contracţie generalizată. Finalul capitolului conţine rezultate care arată că proiecţia canonică asociată unor anumite tipuri de sisteme iterative de funcţii, generalizate şi posibil infinite, $\mathcal{S}$ se poate prezenta ca un punct fix al lui $H_{\mathcal{S}}$, precum şi o serie de exemple.

Conceptul de sistem topologic auto-similar a fost introdus de A. Kameyama (vezi [24]) după cum urmează: *Un spaţiu topological compact Hausdorff K se numeşte mulţime topologică auto-similară dacă există funcţiile continue f_1, f_2, ..., $f_N : K \to K$, unde $N \in \mathbb{N}$, şi o surjecţie continuă $\pi : \Lambda \to K$*

astfel încât diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \overset{\tau_i}{\rightarrow} & \Lambda \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ K & \underset{f_i}{\rightarrow} & K \end{array}$$

este comutativă pentru orice $i \in \{1, ..., N\}$*, unde* $\Lambda = \{1, ..., N\}^{\mathbb{N}^*}$ *este spaţiul codurilor unui IFS format din n funcţii şi* $\tau_i(\omega_1\omega_2...\omega_m\omega_{m+1}...) = i\omega_1\omega_2...\omega_m\omega_{m+1}...$ *pentru orice* $\omega_1\omega_2...\omega_m\omega_{m+1}... \in \Lambda$*. Perechea* $(K, (f_i)_{i\in\{1,...,N\}})$ *se numeşte sistem topologic auto-similar.* El a ridicat următoarea întrebare: dat un sistem topologic auto-similar $(K, (f_i)_{i\in\{1,...,N\}})$, există o metrică pe K compatibilă cu topologia de pe K astfel încât toate funcţiile f_i să fie contracţii în raport cu această metrică? Răspunsul afirmativ la întrebarea lui Kameyama în cazul mulţimilor auto-similare generate de transformări afine ale lui $\mathbb{R}^m$ dat de R. Atkins, M. Barnsley, A. Vince şi D. Wilson (vezi [1]) a fost extins de R. Miculescu şi A. Mihail (vezi [42]) prin înlocuirea lui $\mathbb{R}^m$ cu un spaţiu Banach arbitrar $(X, \|.\|)$ şi a mulţimii $\{1, ..., N\}$ cu o mulţime arbitrară I.

În cel de al treilea capitol (care are la bază conţinutul articolului [76]) continuând direcţia de cercetare prezentată anterior, introducem noţiunea de sistem iterativ de funcţii, generalizat, posibil infinit, constituit din funcţii afine (pe scurt AGIIFS). Vom îmbunătăţi rezultatele prezentate anterior prin justificarea faptului că, pentru un AGIIFS $\mathcal{S}$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $\mathcal{S}$ este hiperbolic.
b) Există o funcţie de comparaţie φ astfel încât $\mathcal{S}$ este φ-hiperbolic.
c) $\mathcal{S}$ are atractor.
d) $\mathcal{S}$ este strict topologic contractiv.
e) $\mathcal{S}$ este uniform punctual fibrat.
f) $\overline{\lim_{n\to\infty}} \max_{\alpha\in_n\Omega} \sqrt[n]{\|A_\alpha\|} < 1$.

În finalul capitolului se prezintă o serie de exemple.

Cel de-al patrulea capitol este dedicat cazului în care GIIFS-ul este constituit dintr-un număr finit de elemente. Mai precis, în prima parte a acestui capitol, arătăm că, în cazul în care AGIIFS-ul $\mathcal{S} = ((X, \|.\|), (f_i)_{i\in I})$ are proprietatea că I este finită şi X este finit dimensional, lista afirmaţiilor echivalente din rezultatul anterior poate fi lărgită prin adăugarea următoarelor afirmaţii:

g) $\mathcal{S}$ este topologic contractiv.

h) $\mathcal{S}$ este Meir-Keeler hiperbolic.

i) $\mathcal{S}$ este non-antipodal.

În a doua parte a capitolului vom prezenta un algoritm (numit algoritmul cu grilă) care permite generarea imaginii atractorului unui GIIFS constituit dintr-un număr finit de elemente. Se compară acest algoritm cu cel deterministic care a fost propus de F. Strobin şi colaboratorii săi (vezi [23]). Algoritmul deterministic constă în alegerea unei mulţimi finite de puncte căreia i se aplică funcţiile constitutive ale sistemului, obţinându-se astfel o nouă mulţime. Fiecăruia dintre aceste noi puncte i se aplică din nou funcţiile constitutive ale sistemului. Continuând acest procedeu ne vom apropia de atractorul sistemului. Ideea principala a algoritmului cu grilă este de a simplifica algoritmul deterministic prin divizarea, la fiecare pas, a spaţiului în care lucrăm, în subspaţii mici şi de a alege, în fiecare dintre ele, un singur punct. Exemplele furnizate arată că deşi algoritmul deterministic generează imaginea atractorului utilizând un număr mult mai mare de puncte în comparaţie cu algoritmul cu grilă, claritatea imaginii celui din urmă este superioară.

Lista rezultatelor originale conţinute în prezenta teză:

a) proiecţia canonică asociată unor anumite tipuri de sisteme iterative de funcţii, generalizate şi posibil infinite, constituite din generalizări ale φ-contracţiilor, se poate prezenta ca punct fix al unui operator asociat sistemului; astfel dăm un răspuns parţial problemei deschise ridicată în ultimul paragraf al lucrării [50];

b) stabilirea unor condiţii echivalente pentru ca un sistem iterativ de funcţii, generalizat, posibil infinit, constituit din funcţii afine, să posede atractor; astfel obţinem o generalizare a rezultului din [42] care, la rândul său generalizează rezultatul din [1];

c) prezentarea unui nou algoritm (numit algoritmul cu grilă) care permite generarea imaginii atractorului unui sistem iterativ de funcţii, generalizat, constituit dintr-un număr finit de elemente; acest algoritm se dovedeşte a fi mai performant decât algoritmul deterministic propus în [23].

Rezultatele originale cuprinse în această teză au fost prezentate comunităţii matematice astfel:

Au acceptul de publicare următoarele articole:

- Silviu-Aurelian Urziceanu, *Alternative characterizations of AGIFSs having attractor*, Fixed Point Theory;

- Silviu-Aurelian Urziceanu, *Possibly infinite generalized iterated function systems comprising φ-max contractions*, Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica.

Am publicat, în colaborare cu R. Miculescu, articolul *The canonical projection associated with certain possibly infinite generalized iterated function as a fixed point*, J. Fixed Point Theory Appl., (2018) 20:141.

Am publicat, în colaborare cu R. Miculescu şi A. Mihail, articolul *A new algorithm that generates the image of the attractor of a generalized iterated function system,* Numerical Algorithms.

În cadrul conferinţei *International Conference on Mathematics and Computer Science (MACOS 2016), Braşov, Romania, 2nd Edition*, vineri 9 septembrie 2016, am susţinut conferinţa cu titlul *Alternative characterizations of AGIFSs having attractor.*

În cadrul conferinţei *23*$^{\text{rd}}$ *International Conference on Difference Equations and Applications (ICDEA 2017), Timişoara, Romania*, joi 27 iulie 2017, am susţinut conferinţa cu titlul *On AGIIFSs having attractor.*

În cadrul conferinţei *4*$^{\text{th}}$ *International Conference on Numerical Analysis and Approximation Theory (NAAT 2018), Cluj-Napoca, Romania*, sâmbătă 8 septembrie 2018, am susţinut conferinţa cu titlul *Possibly infinite generalized iterated function systems comprising φ-max contractions.*

Mulţumesc celor care au făcut posibilă elaborarea acestei lucrări. În primul rând domnului lector univ. dr. habil. Alexandru Mihail, conducătorul ştiinţific al acestei lucrări pentru ajutorul pe care l-am primit de-a lungul perioadei studiilor mele doctorale şi nu numai. De asemenea doresc să-i mulţumesc şi domnului profesor univ. dr. habil. Radu Miculescu pentru sfaturile şi încurajările primite în perioada elaborării prezentei lucrări. Mulţumirile mele se îndreaptă şi către membrii întregului colectiv al Departamentului de Matematică şi Informatică al Universităţii din Piteşti pentru atmosfera propice creată şi, nu în ultimul rând, către colegii din Şcoala Doctorală ale căror expuneri mi-au îmbunătăţatit şi lărgit cunoştinţele.

Familia mea a reprezentat un substanţial ajutor moral şi cadrul fără de care nimic trainic nu poate lua fiinţă.

CAPITOLUL I
PRELIMINARII

Spaţiul codurilor generalizat

Noţiunea de spaţiu al codurilor generalizat a fost introdusă de A. Mihail (vezi [48]). Un concept echivalent, a cărui utilizare este mai facilă şi care este datorat matematicienilor polonezi F. Strobin şi J. Swaczyna (vezi [74]), va fi prezentat în cele ce urmează.

Fie $m \in \mathbb{N}^*$ şi I o mulţime arbitrară. Vom defini inductiv mulţimile Ω_1, Ω_2, ..., Ω_k, ... astfel $\Omega_1 = I$ şi

$$\Omega_{k+1} = \underbrace{\Omega_k \times \Omega_k \times ... \times \Omega_k}_{m \text{ ori}}$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

Vom considera, de asemenea, următoarele mulţimi:

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times \Omega_k \times ...$$

şi

$${}_k\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times \Omega_k,$$

unde $k \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ şi $\alpha = \alpha^1\alpha^2...\alpha^k \in {}_k\Omega$, unde $\alpha^2 = \alpha_1^2\alpha_2^2...\alpha_m^2 \in \Omega_2$, ..., $\alpha^k = \alpha_1^k\alpha_2^k...\alpha_m^k \in \Omega_k$, vom considera

$$\alpha(i) = \alpha_i^2\alpha_i^3...\alpha_i^k \in {}_{k-1}\Omega.$$

Pentru $\alpha \in \Omega$ şi $i \in \{1, 2, ..., m\}$, definim $\alpha(i) \in \Omega$ în mod similar.

Definiţia 1.1. *Ω se numeşte spaţiul codurilor generalizat.*

Remarca 1.1. *Ω devine un spaţiu metric complet dacă este înzestrat cu metrica d descrisă de*

$$d(\alpha, \beta) = \sum_{k\in\mathbb{N}} C^k d_k(\alpha^k, \beta^k),$$

pentru orice $\alpha = \alpha^1\alpha^2...\alpha^i\alpha^{i+1}...$, $\beta = \beta^1\beta^2...\beta^i\beta^{i+1}... \in \Omega$, *unde* $d_k(\alpha^k, \beta^k) =$
$\begin{cases} 1, & \alpha^k \neq \beta^k \\ 0, & \alpha^k = \beta^k \end{cases}$ *şi* C *este o constantă fixată din* $(0,1)$.

Spaţiul metric $(X^m, d_{\max})$

Dat un spaţiu metric (X, d) şi $m \in \mathbb{N}^*$, vom înzestra X^m cu metrica $d^d_{\max}$ definită de

$$d^d_{\max}((x_1, ..., x_m), (y_1, ..., y_m)) = \max\{d(x_1, y_1), ..., d(x_m, y_m)\},$$

pentru orice $(x_1, ..., x_m), (y_1, ..., y_m) \in X^m$. Dacă nu este pericol de confuzie vom nota $d^d_{\max}$ cu $d_{\max}$.

Dat un spaţiu metric (X, d) şi $m \in \mathbb{N}^*$, vom defini inductiv spaţiile X_1, X_2, ..., X_k, ... în modul următor:

$$X_1 = \underbrace{X \times X \times ... \times X}_{m \text{ ori}} = X^m$$

şi

$$X_{k+1} = \underbrace{X_k \times X_k \times ... \times X_k}_{m \text{ ori}}$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

Vom înzestra, utilizând metoda inducţiei matematice, X_k cu metrica $d^k_{\max}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, unde $d^k_{\max}$ este asociată lui $(X_{k-1}, d^{k-1}_{\max})$.

Remarca 1.2. X_k *este izometric cu* X^{m^k} *înzestrat cu metrica* $d_{\max}$ *pentru orice* $k \in \mathbb{N}^*$. Ca atare, pe viitor, vom identifica pe X_k cu X^{m^k}.

Remarca 1.3. *În cazul în care* X *este un spaţiu normat înzestrat cu norma* $\|.\|$, X^m *se poate înzestra cu norma* $\|.\|_{\max}$ *definită de*

$$\|(x_1, ..., x_m)\|_{\max} = \max\{\|x_1\|, ..., \|x_m\|\},$$

pentru orice $(x_1, ..., x_m) \in X^m$.

Compunerea generalizată a funcţiilor

Fie spaţiul metric (X, d), $m \in \mathbb{N}^*$ şi o familie de funcţii $(f_i)_{i \in I}$, unde $f_i : X^m \to X$ pentru orice $i \in I$. Vom defini inductiv o familie de funcţii $\{f_\alpha : X_k \to X \mid \alpha \in {}_k\Omega\}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, în modul următor:

i) Pentru $k = 1$, familia este $(f_i)_{i \in I}$.

ii) Dacă funcţiile f_α, unde $\alpha \in {}_k\Omega$, au fost definite, atunci

$$f_\alpha(x_1, x_2, ..., x_m) = f_{\alpha^1}(f_{\alpha(1)}(x_1), ..., f_{\alpha(m)}(x_m))$$

pentru orice $\alpha = \alpha^1\alpha^2...\alpha^k\alpha^{k+1} \in {}_{k+1}\Omega$ şi orice $(x_1, x_2, ..., x_m) \in X_{k+1} =$

$= \underbrace{X_k \times X_k \times ... \times X_k}_{m \text{ ori}}$.

Remarca 1.4. *Familia de funcţii introdusă mai sus constituie o generalizare naturală a compunerilor de funcţii.*

Puncte fixe pentru funcţii $f : X^m \to X$

Fie X o mulţime nevidă, $m \in \mathbb{N}^*$ şi funcţia $f : X^m \to X$. Vom defini inductiv o familie de funcţii $f^{[k]} : X^{m^k} \to X$, $k \in \mathbb{N}^*$, în modul următor:

i) $f^{[1]} = f$;

ii) presupunând că $f^{[k]}$ a fost definită, atunci

$$f^{[k+1]}(x_1, ..., x_m) = f(f^{[k]}(x_1), ..., f^{[k]}(x_m)),$$

pentru orice $(x_1, ..., x_m) \in \underbrace{X^{m^k} \times ... \times X^{m^k}}_{m \text{ ori}} = X^{m^{k+1}} = X_{k+1}$.

Definiţia 1.2. *Fie X o mulţime nevidă, $m \in \mathbb{N}^*$ şi o funcţie $f : X^m \to X$. Un element x al lui X se numeşte punct fix al funcţiei f dacă $f(x, ..., x) = x$.*

Lema 1.1. *În cadrul prezentat anterior, avem:*

$$f^{[p+q]}(x_1, ..., x_{m^{p+q}}) = f^{[p]}(f^{[q]}(x_1, ..., x_{m^q}), ..., f^{[q]}(x_{m^{p+q}-m^q+1}, ..., x_{m^{p+q}})) =$$

$$= f^{[q]}(f^{[p]}(x_1, ..., x_{m^p}), ..., f^{[p]}(x_{m^{p+q}-m^p+1}, ..., x_{m^{p+q}})),$$

pentru orice $p, q \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, ..., x_{m^p})$, ..., $(x_{m^{p+q}-m^p+1}, ..., x_{m^{p+q}}) \in X^{m^p}$, $(x_1, ..., x_{m^q})$, ..., $(x_{m^{p+q}-m^q+1}, ..., x_{m^{p+q}}) \in X^{m^q}$.

Propoziţia 1.1. *În cadrul prezentat anterior, dacă $f^{[n]}$ are un unic punct fix, unde $n \in \mathbb{N}^*$, atunci f are un unic punct fix. Mai mult, $f^{[n]}$ şi $f^{[k]}$ au acelaşi unic punct fix pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.*

Pseudo-metrica Hausdorff-Pompeiu

Dat spaţiul metric (X, d), vom considera:

- $P_b(X) = \{N \subseteq X \mid N$ este nevidă şi mărginită$\}$
- $P_{cl,b}(X) = \{N \subseteq X \mid N$ este nevidă,închisă şi mărginită$\}$
- $P_{cp}(X) = \{N \subseteq X \mid N$ este nevidă şi compactă$\}$.

Pentru $x \in X$, $\varepsilon > 0$ şi $A, B \in P_b(X)$, vom considera:

- $d(x, A) \overset{def}{=} \inf_{a \in A} d(x, a)$
- $B(A, \varepsilon) \overset{def}{=} \{x \in X \mid d(x, A) < \varepsilon\} = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$
- $B[A, \varepsilon] \overset{def}{=} \{x \in X \mid d(x, A) \leq \varepsilon\}$
- $d(A, B) \overset{def}{=} \sup_{x \in A} d(x, B)$.

Definiţia 1.3. *Funcţia $h^* : P_b(X) \times P_b(X) \to [0, \infty)$ dată de*

$$h^*(A.B) = \max\{d(A, B), d(B.A)\},$$

este o pseudo-metrică pe $P_b(X)$ care poartă numele de pseudometrica Hausdorff-Pompeiu. Restricţia lui h^* la $P_{cl,b}(X) \times P_{cl,b}(X)$ este o metrică ce poartă numele de metrica Hausdorff-Pompeiu şi care va fi notată cu h.

Propoziţia 1.2 (vezi 26.1, pagina 44 din [29])**.** *Dacă spaţiul metric (X, d) este complet, atunci spaţiile metrice $(P_{cp}(X), h)$ şi $(P_{cl,b}(X), h)$ sunt complete.*

Cititorul interesat poate găsi mai multe detalii privind (pseudo) metrica Hausdorff-Pompeiu în lucrarea [69].

Sisteme iterative de funcţii, generalizate şi posibil infinite

Definiţia 1.4. *Un sistem iterativ de funcţii, generalizat şi posibil infinit, de ordin $m \in \mathbb{N}^*$ este o pereche $\mathcal{S} = ((X, d), (f_i)_{i \in I})$, unde (X, d) este un spaţiu metric, $f_i : X^m \to X$ este continuă pentru orice $i \in I$ şi familia* *de funcţii* $(f_i)_{i\in I}$ *este mărginită (i.e.* $\underset{i\in I}{\cup} f_i(B)$ *este mărginită pentru orice* $B \in P_b(X)^m$*).*

Funcţia $F_{\mathcal{S}} : (P_{cl,b}(X))^m \to P_{cl,b}(X)$*, dată de*

$$F_{\mathcal{S}}(B_1,...,B_m) = \overline{\underset{i\in I}{\cup} f_i(B_1 \times ... \times B_m)},$$

pentru orice $(B_1,...,B_m) \in (P_{cl,b}(X))^m$*, se numeşte operatorul fractal asociat sistemului* $\mathcal{S}$*.*

Dacă $F_{\mathcal{S}}$ *are un unic punct fix, atunci el se numeşte atractorul lui* $\mathcal{S}$ *şi se notează cu* $A_{\mathcal{S}}$*.*

Remarca 1.5. *Dacă mulţimea* I *este finită, atunci* $F_{\mathcal{S}}((P_{cp}(X))^m) \subseteq P_{cp}(X)$ *şi facem convenţia de a nota funcţia* $(B_1,...,B_m) \in (P_{cp}(X))^m \to F_{\mathcal{S}}(B_1,...,B_m) \in P_{cp}(X)$ *tot cu* $F_{\mathcal{S}}$*. Dacă* $F_{\mathcal{S}}$ *este operator Picard, atunci* $A_{\mathcal{S}} \in P_{cp}(X)$*.Observam ca în definiţia lui* $F_{\mathcal{S}}$ *putem renunţa la considerarea operatorului de închidere.*

Definiţia 1.5. *Un sistem iterativ de funcţii, generalizat şi posibil infinit* $\mathcal{S} = ((X,d),(f_i)_{i\in I})$ *admite proiecţie canonică dacă, pentru orice* $\alpha = \alpha^1...\alpha^i... \in \Omega$*, mulţimea* $\underset{k\in\mathbb{N}}{\cap} \overline{f_{\alpha^1...\alpha^k}((A_{\mathcal{S}})_k)}$ *constă într-un unic element notat* x_α*. În acest caz, funcţia* $\pi : \Omega \to X$ *dată de* $\pi(\alpha) = x_\alpha$ *pentru orice* $\alpha \in \Omega$*, se numeşte proiecţia canonică asociată sistemului* $\mathcal{S}$*.*

Fie $\mathcal{S} = ((X,d),(f_i)_{i\in I})$ un sistem iterativ de funcţii, generalizat şi posibil infinit de ordin $m \in \mathbb{N}^*$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Putem considera un nou GIIFS (de ordin m^n), anume $\mathcal{S}_n := ((X,d),(f_\alpha)_{\alpha\in_n\Omega})$.

Cu precizarea că, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, prin $\mathbb{X}_k$ înţelegem spaţiul X_k corespunzător spaţiului metric $(P_{cl,b}(X),h)$, funcţia $F_{\mathcal{S}_n} : (P_{cl,b}(X))^{m^n} \to P_{cl,b}(X)$ este dată de $F_{\mathcal{S}_n}(B_1,...,B_m) = \overline{\underset{\alpha\in_n\Omega}{\cup} f_\alpha(B_1,...,B_m)}$, pentru orice $(B_1,...,B_m) \in \mathbb{X}_n$.

CAPITOLUL II

SISTEME ITERATIVE DE FUNCŢII, GENERALIZATE ŞI POSIBIL INFINITE, CONSTITUITE DIN GENERALIZĂRI ALE φ-CONTRACŢIILOR

Datorită importanţei noţiunii de IFS au fost elaborate diverse generalizări ale acestui concept.

Una dintre direcţiile de generalizare constă în studiul sistemelor constituite dintr-o mulţime infinită de funcţii. Studiul acestora a fost iniţiat de H. Fernau (vezi [15]) şi continuat de I. Chiţescu, R. Miculescu şi L. Ioana (vezi [5]), D. Dumitru (vezi [8]), D. Dumitru, L. Ioana, R. Sfetcu şi F. Strobin (vezi [10]), D. Dumitru şi A. Mihail (vezi [11]), G. Gwóźdź-Łukowska şi J. Jachymski (vezi [17]), M.R. Hille (vezi [19]), L. Jakszlas (vezi [22]), M. Klimek şi M. Kosek (vezi [26]), K. Leśniak (vezi [27]), G.B. Lewellen (vezi [28]), S.L. Lipscomb (vezi [29]), R.D. Mauldin şi M. Urbánski (vezi [34] şi [35]), F. Mendivil (vezi [36]), R. Miculescu şi L. Ioana (vezi [38]), R. Miculescu şi A. Mihail (vezi [39], [40], [41] şi [53]), A. Mihail (vezi [49]), N.A. Secelean (vezi [59], [60], [61], [62], [63], [64], [65], [66], [67], [68], [69] şi [70]), T. Szarek şi S. Wedrychowicz (vezi [75]) şi K.R. Wiks (vezi [78]). Menţionăm că în studiul proprietăţilor topologice ale acestor sisteme un rol central îl joacă spaţiul codurilor şi proiecţia canonică (vezi [13], [18] şi [25]).

O altă direcţie de generalizare este dată de sistemele constituite din φ-max-contracţii (vezi [16]).

În acest capitol (care reflectă conţinutul articolelor [47] şi [77]) combinăm aceste două direcţii de cercetare prin studierea sistemelor iterative de funcţii, generalizate şi posibil infinite, constituite din generalizări ale φ-contracţiilor. Mai precis, dat un sistem iterativ de funcţii, generalizat şi posibil infinit $\mathcal{S} = ((X,d),(f_i)_{i\in I})$, de ordin m, construim un operator $H_{\mathcal{S}} : \mathcal{C}^m \to \mathcal{C}$, unde $\mathcal{C} = \{f : \Omega \to X \mid f \text{ este continuă şi mărginită}\}$ se înzestrează cu metrica uniformă, iar Ω reprezintă spaţiul codurilor generalizat. În continuare se prezintă unele rezultate care furnizează condiţii suficiente (asupra funcţiilor constitutive ale sistemului) pentru ca operatorul $H_{\mathcal{S}}$ să fie continuu, contracţie, φ-contracţie, Meir-Keeler, contractiv sau φ-max-contracţie generalizată. Finalul capitolului conţine rezultate care arată că proiecţia canonică asociată unor anumite tipuri de sisteme iterative de funcţii, generalizate şi posibil infinite, $\mathcal{S}$ se poate prezenta ca un punct fix al lui $H_{\mathcal{S}}$, precum şi o serie de exemple.

Puncte fixe pentru unele clase de funcţii $f : X^m \to X$

Definiţia 2.1. *Fie (X, d) un spaţiu metric şi $m \in \mathbb{N}^*$. O funcţie $f : X^m \to X$ se numeşte contracţie dacă există $C \in [0, 1)$ astfel încât*

$$d(f(x), f(y)) \leq C d_{\max}(x, y),$$

pentru orice $x, y \in X^m$.

Definiţia 2.2. *O funcţie $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ se numeşte funcţie de comparaţie dacă satisface următoarele proprietăţi:*
i) este crescătoare;
ii) este continuă la dreapta;
iii) $\varphi(t) < t$ pentru orice $t > 0$.

Definiţia 2.3. *Fie (X, d) un spaţiu metric, $m \in \mathbb{N}^*$şi φ o funcţie de comparaţie. O funcţie $f : X^m \to X$ se numeşte φ-contracţie dacă*

$$d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d_{\max}(x, y)),$$

pentru orice $x, y \in X^m$.

Definiţia 2.4. *Fie (X, d) un spaţiu metric, $m \in \mathbb{N}^*$şi φ o funcţie de comparaţie. O funcţie $f : X^m \to X$ se numeşte φ-max contracţie generalizată dacă există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât*

$$d(f^{[p]}(x), f^{[p]}(y)) \leq \varphi(\max\{\max_{\sigma \in \mathcal{F}_i^p} d(f^{[i]}(x_\sigma), f^{[i]}(y_\sigma)) \mid i \in \{0, 1, 2, ..., p-1\}\}),$$

pentru orice $x, y \in X^{m^p}$, unde $\mathcal{F}_i^p = \{\sigma : \{1, 2, ..., m^i\} \to \{1, 2, ..., m^p\}\}$, iar pentru $x = (x_1, x_2, ..., x_{m^p}), y = (y_1, y_2, ..., y_{m^p}) \in X^{m^p}$, avem $x_\sigma = (x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(m^i)})$ şi $y_\sigma = (y_{\sigma(1)}, ..., y_{\sigma(m^i)})$.

Definiţia 2.5. *Fie (X, d) un spaţiu metric, $m \in \mathbb{N}^*$şi φ o funcţie de comparaţie. O funcţie $f : X^m \to X$ se numeşte Meir-Keeler dacă pentru* *orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta_\varepsilon > 0$ *astfel încât* $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$,*pentru orice* $x, y \in X^m$ *cu proprietatea că* $d_{\max}(x, y) < \varepsilon + \delta_\varepsilon$.

Lema 2.1. *Fie* (X, d) *un spaţiu metric,* $m \in \mathbb{N}^*$*şi* φ *o funcţie de comparaţie. Atunci orice* φ*-contracţie* $f : X^m \to X$ *este Meir-Keeler.*

Definiţia 2.6. *Fie* (X, d) *un spaţiu metric şi* $m \in \mathbb{N}^*$. *O funcţie* $f : X^m \to X$ *se numeşte contractivă dacă* $d(f(x), f(y)) < d_{\max}(x, y)$,*pentru orice* $x, y \in X^m$, $x \neq y$.

Teorema 2.1 (vezi Teorema 19, [9])**.** *Fie* (X, d) *un spaţiu metric şi* $m \in \mathbb{N}^*$. *Orice funcţie Meir-Keeler* $f : X^m \to X$ *are un unic punct fix* x_0 *şi şirul* $(f^{[n]}(x, ..., x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ *converge la* x_0 *pentru orice* $x \in X$.

Definiţia 2.7. *Fie* (X, d) *un spaţiu metric şi* $m \in \mathbb{N}^*$. *O familie de funcţii* $f_i : X^m \to X$, $i \in I$, *se numeşte uniform Boyd-Wong dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta_\varepsilon, \lambda_\varepsilon > 0$ *astfel încât*

$$d(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon - \lambda_\varepsilon,$$

pentru orice $i \in I$ *şi orice* $x, y \in X^m$ *având proprietatea că* $d_{\max}(x, y) < \varepsilon + \delta_\varepsilon$.

Remarca 2.1. Conceptul introdus în definiţia anterioară se găseşte în [9] sub numele de familie uniform Meir-Keeler. Aşa cum referentul anonim al lucrării [47] a sugerat, având în vedere Teorema 7 din [21], terminologia de familie uniform Boyd-Wong este mult mai potrivită.

Definiţia 2.8. *Fie* (X, d) *un spaţiu metric şi* $m \in \mathbb{N}^*$. *O familie de funcţii* $f_i : X^m \to X$, $i \in I$, *se numeşte uniform echicontinuă dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta_\varepsilon > 0$ *astfel încât*

$$d(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon,$$

pentru orice $i \in I$ *şi orice* $x, y \in X^m$ *având proprietatea că* $d_{\max}(x, y) < \delta_\varepsilon$.

Teorema 2.2. *Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet,* $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *o funcţie de comparaţie,* $m, p \in \mathbb{N}^*$*şi* $f : X^m \to X$ *o funcţie continuă astfel încât*

$$d(f^{[p]}(x), f^{[p]}(y)) \leq \varphi(\max\{\max_{\sigma \in \mathcal{F}_i^p} d(f^{[i]}(x_\sigma), f^{[i]}(y_\sigma)) \mid i \in \{0, 1, 2, ..., p-1\}\}),$$

pentru orice $x, y \in X^{m^p}$.

Atunci:

a) Există un unic $\alpha \in X$ *astfel încât* $f(\alpha, ..., \alpha) = \alpha$.

b) În ipoteza suplimentară că f *este mărginită pe submulţimile mărginite ale lui* X^m, *avem* $\lim\limits_{k\to\infty} f^{[k]}(x_k) = \alpha$ *pentru orice* $B \in P_{b,cl}(X)$ *şi orice* $x_k \in B^{m^k}$, *convergenţa fiind uniformă în raport cu* x_k.

Clase speciale de sisteme iterative de funcţii, generalizate şi posibil infinite

Teorema 2.3. *Orice sistem iterativ de funcţii, generalizat şi posibil infinit,* $\mathcal{S} = ((X, d), (f_i)_{i\in I})$, *unde spaţiul metric* (X, d) *este complet, care are proprietatea că există o funcţie de comparaţie* φ *astfel încât toate funcţiile* f_i *sunt* φ*-contracţii, are atractor (i.e. există o unică mulţime* $A_{\mathcal{S}} \in P_{cl,b}(X)$ *astfel încât* $F_{\mathcal{S}}(A_{\mathcal{S}}, ..., A_{\mathcal{S}}) = A_{\mathcal{S}}$*) şi admite proiecţie canonică. În plus,* $A_{\mathcal{S}} = \overline{\pi(\Omega)}$.

Teorema 2.4. *Orice sistem iterativ de funcţii, generalizat şi posibil infinit,* $\mathcal{S} = ((X, d), (f_i)_{i\in I})$, *unde spaţiul metric* (X, d) *este complet, care are proprietatea că familia de funcţii* $(f_i)_{i\in I}$ *este uniform Boyd-Wong, are atractor şi admite proiecţie canonică.*

Teorema 2.5. *Fie* $\mathcal{S} = ((X, d), (f_i)_{i\in I})$ *un sistem iterativ de funcţii, generalizat şi posibil infinit, de ordin* $m \in \mathbb{N}^*$ *şi* $p \in \mathbb{N}$ *astfel încât*

$$d(f_\alpha(x), f_\alpha(y)) \le \varphi(\max\{\max_{\sigma\in\mathcal{F}_q^p} d(f_\beta(x_\sigma), f_\beta(y_\sigma)) \mid \beta \in {}_q\Omega, q \in \{0, 1, ..., p-1\}),$$

pentru orice $x, y \in X^{m^p}$. *Atunci:*

a) există o unică mulţime $A_{\mathcal{S}} \in P_{b,cl}(X)$ *astfel încât* $F_{\mathcal{S}}(A_{\mathcal{S}}, ..., A_{\mathcal{S}}) = A_{\mathcal{S}}$, *i.e.* $\mathcal{S}$ *are atractor.*

b) $\lim\limits_{n\to\infty} F_{\mathcal{S}}^{[n]}(B_n) = A_{\mathcal{S}}$ *pentru orice* $B \in P_{b,cl}(X)$ *şi orice* $B_n = (B_1^n, ..., B_{m^n}^n) \subseteq B^{m^n}$, *cu* $B_i^n \in P_{b,cl}(X)$ *pentru orice* $i \in \{1, 2, ..., m^n\}$.

c) pentru orice $\alpha = \alpha^1...\alpha^n... \in \Omega$, *mulţimea* $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{f_{\alpha^1\alpha^2...\alpha^n}(A_{\mathcal{S}}, ..., A_{\mathcal{S}})}$ *are un unic element notat* a_α, *deci* $\mathcal{S}$ *admite proiecţie canonică.*

d) pentru orice $\alpha = \alpha^1...\alpha^n... \in \Omega$, $B \in P_{b,cl}(X)$ *şi orice* $B_n = (B_1^n, ..., B_{m^n}^n) \subseteq B^{m^n}$, *cu* $B_i^n \in P_{b,cl}(X)$ *pentru orice* $i \in \{1, 2, ..., m^n\}$, *avem* $\lim\limits_{n\to\infty} f_{\alpha^1\alpha^2...\alpha^n}(B_n) = \{a_\alpha\}$ *şi convergenţa este uniformă în raport cu* α *şi cu mulţimea* B.

Operatorul $H_{\mathcal{S}}$ asociat sistemului iterativ de funcţii, generalizat şi posibil infinit $\mathcal{S}$

Dat un sistem iterativ de funcţii, generalizat şi posibil infinit $\mathcal{S} = ((X,d),(f_i)_{i\in I})$ de ordin m, putem considera operatorul $H_{\mathcal{S}} : \mathcal{C}^m \to \mathcal{C}$ dat de

$$H_{\mathcal{S}}(g_1,...,g_m)(\alpha) = f_{\alpha^1}(g_1(\alpha(1)),...,g_m(\alpha(m))),$$

pentru orice $g_1,...,g_m \in \mathcal{C}$ şi orice $\alpha = \alpha^1\alpha^2...\alpha^k... \in \Omega$, unde spaţiul metric $(\mathcal{C}, d_u)$ este descris astfel:

$$\mathcal{C} = \{f : \Omega \to X \mid f \text{ este continuă şi mărginită}\}$$

şi

$$d_u(f,g) = \sup_{\alpha\in\Omega} d(f(\alpha), g(\alpha))$$

pentru orice $f, g \in \mathcal{C}$.

Remarca 2.2.
i) *Dacă* (X,d) *este complet, atunci* $(\mathcal{C}, d_u)$ *este complet.*
ii) $H_{\mathcal{S}}$ *este bine definit, i.e.* $H_{\mathcal{S}}(g_1,...,g_m)$ *este continuă şi mărginită pentru orice* $g_1,...,g_m \in \mathcal{C}$.

Proprietăţile operatorului $H_{\mathcal{S}}$

Propoziţia 2.1. *Pentru orice sistem iterativ de funcţii, generalizat şi posibil infinit,* $\mathcal{S} = ((X,d),(f_i)_{i\in I})$ *(de ordin* $m \in \mathbb{N}^*$*) cu proprietatea că familia de funcţii* $(f_i)_{i\in I}$ *este uniform echicontinuă, operatorul* $H_{\mathcal{S}}$ *este continuu.*

Propoziţia 2.2.
α) *Pentru orice sistem iterativ de funcţii, generalizat şi posibil infinit,* $\mathcal{S} = ((X,d),(f_i)_{i\in I})$ *de ordin* $m \in \mathbb{N}^*$*, avem* $\mathrm{lip}(H_{\mathcal{S}}) \leq \sup_{i\in I} \mathrm{lip}(f_i)$. *În particular, dacă* $\sup_{i\in I} \mathrm{lip}(f_i) < 1$*, atunci operatorul* $H_{\mathcal{S}}$ *este contracţie (deci* $H_{\mathcal{S}}$ *este Meir-Keeler - vezi Lema 2.1).*
β) *Pentru orice funcţie de comparaţie* φ *şi orice sistem iterativ de funcţii, generalizat şi posibil infinit,* $\mathcal{S} = ((X,d),(f_i)_{i\in I})$ *de ordin* $m \in \mathbb{N}^*$*, astfel încât*

toate funcţiile f_i sunt φ-contracţii, operatorul $H_{\mathcal{S}}$ este φ-contracţie (deci $H_{\mathcal{S}}$ este *Meir-Keeler - vezi Lema 2.1).*

γ) Pentru orice sistem iterativ de funcţii, generalizat şi posibil infinit, $\mathcal{S} = ((X,d),(f_i)_{i\in I})$ de ordin $m \in \mathbb{N}^*$, astfel încât familia de funcţii $(f_i)_{i\in I}$ este uniform Boyd-Wong, operatorul $H_{\mathcal{S}}$ este Meir-Keeler.

δ) Pentru orice sistem iterativ de funcţii, generalizat şi posibil infinit, $\mathcal{S} = ((X,d),(f_i)_{i\in I})$ de ordin $m \in \mathbb{N}^*$, astfel încât I este finită şi toate funcţiile f_i sunt Meir-Keeler, operatorul $H_{\mathcal{S}}$ este Meir-Keeler.

Propoziţia 2.3. *Pentru orice sistem iterativ de funcţii, generalizat şi posibil infinit, $\mathcal{S} = ((X,d),(f_i)_{i\in I})$ de ordin $m \in \mathbb{N}^*$, astfel încât I este finită şi toate funcţiile f_i sunt contractive, operatorul $H_{\mathcal{S}}$ este contractiv.*

Propoziţia 2.4. *Fie $\mathcal{S} = ((X,d),(f_i)_{i\in I})$ un sistem iterativ de funcţii, generalizat şi posibil infinit, de ordin $m \in \mathbb{N}^*$ şi $p \in \mathbb{N}$ astfel încât*

$$d(f_\alpha(x), f_\alpha(y)) \leq \varphi(\max\{\max_{\sigma\in\mathcal{F}_q^p} d(f_\beta(x_\sigma), f_\beta(y_\sigma)) \mid \beta \in_q \Omega, q \in \{0,1,...,p-1\}),$$

pentru orice $x, y \in X^{m^p}$. Atunci $H_{\mathcal{S}}$ este φ-max contracţie generalizată.

Proiecţia canonică asociată unor sisteme iterative de funcţii, generalizate şi posibil infinite se poate prezenta ca un punct fix

Teorema 2.6. *Pentru un sistem iterativ de funcţii, generalizat şi posibil infinit, $\mathcal{S} = ((X,d),(f_i)_{i\in I})$, unde (X,d) este complet, există o unică funcţie $\pi_0 \in \mathcal{C}$ astfel încât:*

a) $H_{\mathcal{S}}(\pi_0,...,\pi_0) = \pi_0$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} H_{\mathcal{S}}^{[n]}(f,...,f) = \pi_0$, pentru orice $f \in \mathcal{C}$,

dacă este satisfăcută una dintre condiţiile următoare:

i) există o funcţie de comparaţie φ astfel încât toate funcţiile f_i sunt φ-contracţii (în particular dacă $\sup\limits_{i\in I} \operatorname{lip}(f_i) < 1$);

ii) familia de funcţii $(f_i)_{i\in I}$ este uniform Boyd-Wong;

iii) I este finită şi toate funcţiile f_i sunt Meir-Keeler.

Remarca 2.3. *În acord cu Theorem 3.1 din* [73], *dacă i) este satisfăcută, pentru orice $g_1,...,g_m \in \mathcal{C}$, şirul $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$, definit de $g_{m+k} = H_{\mathcal{S}}(g_k, g_{k+1}..., g_{k+m-1})$, converge la π_0.*

Propoziţia 2.5. *În cadrul teoremei anterioare, avem* $\overline{\pi_0(\Omega)} = A_{\mathcal{S}}$.

Propoziţia 2.6. *În cadrul propoziţiei anterioare,* π_0 *este proiecţia canonică asociată lui* $\mathcal{S}$.

Teorema 2.7. *Fie* $\mathcal{S} = ((X,d),(f_i)_{i\in I})$ *un sistem iterativ de funcţii, generalizat şi posibil infinit, de ordin* $m \in \mathbb{N}^*$ *şi* $p \in \mathbb{N}$ *astfel încât*

$$d(f_\alpha(x), f_\alpha(y)) \leq \varphi(\max\{\max_{\sigma\in\mathcal{F}_q^p} d(f_\beta(x_\sigma), f_\beta(y_\sigma)) \mid \beta \in_q \Omega, q \in \{0,1,...,p-1\}\}),$$

pentru orice $x, y \in X^{m^p}$.

A*tunci există o unică funcţie* $\pi \in \mathcal{C}$ *astfel încât:*

a) $H_{\mathcal{S}}(\pi,...,\pi) = \pi$ *şi* $\overline{\pi(\Omega)} = A_{\mathcal{S}}$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} H_{\mathcal{S}}^{[n]}(f_n) = \pi$ *pentru orice* $B \in P_{b,cl}(X)$ *şi* $f_n = (f_1^n,...,f_{m^n}^n) \in \mathcal{C}_B^{m^n}$, *unde* $\mathcal{C}_B = \{f : \Omega \to B \mid f$ *este continuă*$\}$ *este înzestrat cu norma uniformă, convergenţa fiind uniformă în raport cu* B.

c) π *este proiecţia canonică asociată lui* $\mathcal{S}$.

Exemplul 1. Având ca sursă de inspiraţie lucrarea [9], vom considera sistemul iterativ de funcţii, generalizat şi posibil infinit $\mathcal{S} = ((X,d),(f_n)_{n\in\mathbb{N}})$ de ordin 2, unde $X = [0,1]$, d este metrica euclidiană şi funcţiile $f_n : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ sunt date de

$$f_n(x,y) = \frac{1}{2^{n+2}}(x+y) + \frac{1}{2^{n+1}},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in [0,1]$. Atunci:

i) familia de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este uniform Boyd-Wong deoarece $lip(f_n) \leq \frac{1}{2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$;

ii) operatorul $H_{\mathcal{S}} : \mathcal{C}^2 \to \mathcal{C}$ acţionează în modul următor:

$$H_{\mathcal{S}}(g_1,g_2)(\alpha) = \frac{1}{2^{\alpha^1+2}}(g_1(\alpha_2^1\alpha_3^1...\alpha_k^1...) + g_2(\alpha_2^2\alpha_3^2...\alpha_k^2...)) + \frac{1}{2^{\alpha^1+1}},$$

pentru orice $g_1, g_2 \in \mathcal{C}$ şi orice $\alpha = \alpha^1\alpha^2...\alpha^k... \in \Omega$, unde $\alpha^k = \alpha_k^1\alpha_k^2 \in \Omega_k$ cu $\alpha_k^1, \alpha_k^2 \in \Omega_{k-1}$;

iii) $A_{\mathcal{S}} = [0,1]$ deoarece $[0,1] = \overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]} = \overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n([0,1]\times[0,1])} = F_{\mathcal{S}}([0,1],[0,1])$;

iv) $0 \notin \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} f_n(A_{\mathcal{S}} \times A_{\mathcal{S}})$, deci operatorul de închidere care intervine în definiţia lui $F_{\mathcal{S}}$ nu poate fi omis.

Exemplul 2. Fie $\mathcal{S} = (([0,1], d), \{f, g\})$ un GIFS (de ordin 2), unde d este distanţa uzuală pe $[0,1]$ şi $f, g : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ sunt descrise de $f(x,y) = \frac{1}{2}(x - \frac{x^2}{2} + y - \frac{y^2}{2})$ şi $g(x,y) = 1 - f(1-x, 1-y)$, pentru orice $x, y \in [0,1]$. $\mathcal{S}$ este un GIFS de ordin 2 format din φ contracţii care nu sunt contractii. Deoarece $f([0,1] \times [0,1]) = [0, \frac{1}{2}]$ şi $g([0,1] \times [0,1]) = [\frac{1}{2}, 1]$, concluzionăm că $A_{\mathcal{S}} = [0,1]$.

Exemplul 3. Fie $X = [0,1] \cup (\underset{n\in\mathbb{N}^*}{\cup} \{4n, 4n+1\})$ înzestrat cu distanţa euclidiană.

Fie funcţiile $f, g : X \to X$ descrise astfel:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{există } n \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } x = 4n \\ 1 - \frac{1}{n+3}, & \text{există } n \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } x = 4n+1 \end{cases}$$

şi

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{2}{3}, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{există } n \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } x = 4n \\ 1 - \frac{1}{n+3}, & \text{există } n \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } x = 4n+1 \end{cases}.$$

Considerăm GIFS-ul (de ordin 1) $\mathcal{S} = (X, \{f, g\})$. $\mathcal{S}$ este Meir-Keeler dar nu este Boyd-Wong şi $\mathcal{S}$ nu este φ-contractiv.

CAPITOLUL III

SISTEME ITERATIVE DE FUNCŢII, GENERALIZATE, POSIBIL INFINITE, CONSTITUITE DIN FUNCŢII AFINE

Conceptul de sistem topologic auto-similar a fost introdus de A. Kameyama (vezi [24]) după cum urmează: *Un spaţiu topological compact Hausdorff K se numeşte mulţime topologică auto-similară dacă există funcţiile continue f_1, f_2, ..., $f_N : K \to K$, unde $N \in \mathbb{N}^*$ şi o surjecţie continuă $\pi : \Lambda \to K$ astfel încât diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \overset{\tau_i}{\to} & \Lambda \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi \\ K & \underset{f_i}{\to} & K \end{array}$$

este comutativă pentru orice $i \in \{1, 2, ..., N\}$, unde $\Lambda = \{1, ..., N\}^{\mathbb{N}^*}$ este spaţiul codurilor unui IFS format din n funcţii şi $\tau_i(\omega_1\omega_2...\omega_m\omega_{m+1}...) = i\omega_1\omega_2...\omega_m\omega_{m+1}...$ pentru orice $\omega_1\omega_2...\omega_m\omega_{m+1}... \in \Lambda$. Perechea $(K, (f_i)_{i\in\{1,2,...,N\}})$ se numeşte sistem topologic auto-similar. El a ridicat următoarea întrebare: dat un sistem topologic auto-similar $(K, (f_i)_{i\in\{1,2,...,N\}})$, există o metrică pe K compatibilă cu topologia de pe K astfel încât toate funcţiile f_i să fie contracţii în raport cu această metrică? Răspunsul afirmativ la întrebarea lui Kameyama în cazul mulţimilor auto-similare generate de transformări afine ale lui $\mathbb{R}^m$ dat de R. Atkins, M. Barnsley, A. Vince şi D. Wilson (vezi [1]) a fost extins de R. Miculescu şi A. Mihail (vezi [42]) prin înlocuirea lui $\mathbb{R}^m$ cu un spaţiu Banach arbitrar $(X, \|.\|)$ şi a mulţimii $\{1, 2, ..., N\}$ cu o mulţime arbitrară I. Vezi de asemenea [43] şi [44].

Continuând direcţia de cercetare prezentată anterior, introducem noţiunea de sistem iterativ de funcţii, generalizat, posibil infinit, constituit din funcţii afine (pe scurt AGIIFS). Vom îmbunătăţi rezultatele prezentate anterior prin justificarea faptului că, pentru un astfel de sistem $\mathcal{S}$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $\mathcal{S}$ este hiperbolic (vezi Definiţia 3.3).

b) Există o funcţie de comparaţie φ astfel încât $\mathcal{S}$ este φ-hiperbolic (vezi Definiţia 3.4).

c) $\mathcal{S}$ are atractor (vezi Definiţia 3.7).

d) $\mathcal{S}$ este strict topologic contractiv (vezi Definiţia 3.9).

e) $\mathcal{S}$ este uniform punctual fibrat (vezi Definiţia 3.5).
f) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \max\limits_{\alpha\in_n\Omega} \sqrt[n]{\|A_\alpha\|} < 1$ (vezi Definiţia 3.2).

Aşa cum am menţionat anterior, acest rezultat le generalizează pe cele din [1], [42] şi [76].

În plus, prezentăm două corolarii care furnizează afirmaţii echivalente cu cele de mai sus.

Sisteme iterative de funcţii, generalizate, posibil infinite, constituite din funcţii afine

Definiţia 3.1. *Dat un spaţiu Banach* $(X, \|.\|)$*, o familie de funcţii* $(f_i)_{i\in I}$*, unde* $f_i : X^m \to X$*, se numeşte mărginită dacă* $\underset{i\in I}{\cup} f_i(B)$ *este mărginită pentru orice submulţime mărginită* B *a lui* X^m*.*

Definiţia 3.2. *Un sistem iterativ de funcţii, generalizat, posibil infinit, constituit din funcţii afine (pe scurt AGIIFS), de ordin* $m \in \mathbb{N}^*$*, este o pereche* $\mathcal{S} = ((X, \|.\|), (f_i)_{i\in I})$*, unde* $(X, \|.\|)$ *este un spaţiu Banach* $(f_i)_{i\in I}$ *este o familie de funcţii mărginită cu proprietatea că pentru orice* $i \in I$*, există* $b_i \in X$ *şi un operator liniar mărginit* $A_i : X^m \to X$ *astfel încât* $f_i = A_i + b_i$*. Funcţia* $F_{\mathcal{S}} : (P_{b,cl}(X))^m \to P_{b,cl}(X)$*, dată de* $F_{\mathcal{S}}(B_1, ..., B_m) = \overline{\underset{i\in I}{\cup} f_i(B_1, ..., B_m)}$ *pentru orice* $(B_1, ..., B_m) \in (P_{b,cl}(X))^m$*, se numeşte operatorul fractal asociat sistemului* $\mathcal{S}$*.*

Remarca 3.1. *Mărginirea familiei de funcţii* $(f_i)_{i\in I}$ *care apare în definiţia de mai sus este echivalentă cu mărginirea mulţimilor* $\{b_i \mid i \in I\}$ *şi* $\{\|A_i\| \mid i \in I\}$*.*

Dat un AGIIFS $\mathcal{S} = ((X, \|.\|), (f_i)_{i\in I})$ de ordin $m \in \mathbb{N}^*$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, introducem un nou AGIIFS (de ordin m^n) $\mathcal{S}_n := ((X, d), (f_\alpha)_{\alpha\in_n\Omega})$. Să remarcăm că $F_{\mathcal{S}_n} : (P_{b,cl}(X))^{m^n} \to P_{b,cl}(X)$ este dat de

$$F_{\mathcal{S}_n}(B_1, ..., B_m) = \overline{\underset{\alpha\in_n\Omega}{\cup} f_\alpha(B_1, ..., B_m)},$$

pentru orice $(B_1, ..., B_m) \in \mathbb{X}_n$.

Definiţia 3.3. *Un AGIIFS* $\mathcal{S} = ((X, \|.\|), (f_i)_{i\in I})$ *se numeşte contractiv dacă există* $C \in [0, 1)$ *astfel încât* $\|A_i\| \le C$ *pentru orice* $i \in I$*. Un astfel de* *sistem se numeşte hiperbolic dacă există o normă* $|||.|||$ *pe* X *echivalentă cu* $\|.\|$ *astfel încât AGIIFS-ul* $((X, |||.|||), (f_i)_{i\in I})$ *este contractiv.*

Definiţia 3.4. *Dată o funcţie de comparaţie* $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$, *spunem că AGIIFS-ul* $\mathcal{S} = ((X, \|.\|), (f_i)_{i\in I})$ *este* φ*-contractiv dacă* f_i *este* φ*-contracţie generalizată pentru orice* $i \in I$*., Un astfel de sistem se numeşte* φ*-hyperbolic dacă există o normă* $|||.|||$ *pe* X *echivalentă cu* $\|.\|$ *astfel încât AGIIFS-ul* $((X, |||.|||), (f_i)_{i\in I})$ *este* φ*-contractiv.*

Remarca 3.2. *Clasa AGIIFS-urilor contractive este o subclasă a clasei AGIIFS-urilor* φ*-contractive.*

Într-adevăr, dacă AGIIFS-ul $\mathcal{S} = ((X, \|.\|), (f_i)_{i\in I})$ este contractiv (şi $C \in [0, 1)$ este astfel încât $\|A_i\| = lip(f_i) \le C$ pentru orice $i \in I$), atunci el este de asemenea φ_0-contractiv, unde $\varphi_0 : [0, \infty) \to [0, \infty)$ este dată de $\varphi_0(t) = Ct$ pentru orice $t \in [0, \infty)$.

Definiţia 3.5. *Un AGIIFS* $\mathcal{S} = ((X, \|.\|), (f_i)_{i\in I})$ (de ordin m) *se numeşte punctual fibrat dacă pentru orice* $\alpha = \alpha^1\alpha^2...\alpha^i\alpha^{i+1}... \in \Omega$ *există* $x_\alpha \in X$ *astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty} f_{\alpha^1\alpha^2...\alpha^n}(y, ..., y) = x_\alpha$ *pentru orice* $y \in X$*. Un astfel de sistem se numeşte uniform punctual fibrat dacă este punctual fibrat şi pentru orice submulţime mărginită* B *a lui* X *şi orice* $\varepsilon > 0$ *există* $n_{B,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ *având proprietatea că* $\|f_{\alpha^1\alpha^2...\alpha^n}(x_1, ..., x_{m^n}) - x_\alpha\| < \varepsilon$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_{B,\varepsilon}$, $x_1, ..., x_{m^n} \in B$ *şi* $\alpha = \alpha^1\alpha^2...\alpha^i\alpha^{i+1}... \in \Omega$.

Definiţia 3.6. *Spunem că AGIIFS-ul* $\mathcal{S} = ((X, \|.\|), (f_i)_{i\in I})$ *are atractor dacă există un (unic) element* $A \in P_{b,cl}(X)$ *astfel încât:*

i)

$$F_{\mathcal{S}}(A, ..., A) = A;$$

ii)

$$\lim_{k\to\infty} F_{\mathcal{S}}^{[k]}(B, ..., B) = A,$$

pentru orice $B \in P_{b,cl}(X)$.

Definiţia 3.7. *Dat un spaţiu normat* $(X, \|.\|)$, *vom numi corp convex o mulţime convexă din* $P_{b,cl}(X)$ *care are interiorul nevid.*

Definiţia 3.8. *Un AGIIFS* $\mathcal{S} = ((X, \|.\|), (f_i)_{i\in I})$ *se numeşte topologic contractiv dacă există un corp convex* K *al lui* X *astfel încât*

$$F_{\mathcal{S}}(K, ..., K) \subseteq \overset{\circ}{K}.$$

Un astfel de sistem se numeşte strict topologic contractiv dacă există un corp convex K al lui X având proprietatea că

$$\delta_{\|.\|}(F_{\mathcal{S}}(K, ..., K), X \setminus K) > 0,$$

unde $\delta_{\|.\|}(A, B) = \inf\limits_{a\in A, b\in B} \|a-b\|$ *pentru orice A şi B submulţimi ale lui* $(X, \|.\|)$.

Dacă $\delta_{\|.\|}(A, B) > 0$, unde A şi B submulţimi ale spaţiului normat $(X, \|.\|)$, atunci $A \subseteq X \overset{\circ}{\setminus} B$ (vezi [42]).

Remarca 3.3. *Dacă K este un corp convex, atunci $K-K$ este o vecinătate mărginită, balansată şi convexă a lui 0.*

Definiţia 3.9 (vezi [1])**.** *Dat un spaţiu normat X, un corp convex central simetric K al lui X şi $\|.\|_K$ norma Minkowski asociată lui K, definim metrica Minkowski pe X prin regula $d_K(x, y) = \|x-y\|_K$.*

Să remarcăm că K reprezintă bila unitate în raport cu $\|.\|_K$.

Propoziţia 3.1 (vezi Propoziţia 5.6 din [1])**.** *Dat un spaţiu normat $(X, \|.\|)$ şi un corp convex K al lui X, d_K şi metrica d_E, descrisă de regula $d_E(x, y) = \|x-y\|$, sunt echivalente.*

Rezultatele principale

Teorema 3.1. *Dat un AGIIFS $\mathcal{S}$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
1. $\mathcal{S}$ este hiperbolic.
2. Există o funcţie de comparaţie φ astfel încât $\mathcal{S}$ este φ-hiperbolic.
3. $\mathcal{S}$ are atractor.
4. $\mathcal{S}$ este strict topologic contractiv.
5. $\mathcal{S}$ este uniform punctual fibrat.
6. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \max\limits_{\alpha\in_n\Omega} \sqrt[n]{\|A_\alpha\|} < 1$.
7. Există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\max\limits_{\alpha\in_n\Omega} \sqrt[n]{\|A_\alpha\|} < 1$.

Corolar 3.1. *În cazul în care pentru AGIIFS-ul $\mathcal{S} = ((X, \|.\|), (f_i)_{i\in I})$ avem $b_i = 0$ (i.e. $\mathcal{S}$ este constituit din funcţii liniare, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\mathcal{S}$ este hiperbolic.
2. Există o funcţie de comparaţie φ astfel încât $\mathcal{S}$ este φ-hiperbolic.
3. $A = \{0\}$ este atractorul lui $\mathcal{S}$.
4. $\mathcal{S}$ este strict topologic contractiv.
5. $\mathcal{S}$ este uniform punctual fibrat.
6. $\overline{\lim_{n\to\infty}} \max_{\alpha\in_n\Omega} \sqrt[n]{\|A_\alpha\|} < 1$.

Corolar 3.2. *Pentru orice AGIIFS $\mathcal{S} = ((X, \|.\|), (f_i)_{i\in I})$, următoarele afirmaţii sunt echivalente::*
1. Există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\mathcal{S}_n$ este hiperbolic.
2. Există $n \in \mathbb{N}^*$ şi o funcţie de comparaţie φ astfel încât $\mathcal{S}_n$ este φ-hiperbolic.
3. Există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\mathcal{S}_n$ are atractor.
4. $\mathcal{S}$ are atractor.
5. Există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\mathcal{S}_n$ este strict topologic contractiv.
6. $\overline{\lim_{n\to\infty}} \max_{\alpha\in_n\Omega} \sqrt[n]{\|A_\alpha\|} < 1$.

Remarca 3.4. *Condiţiile echivalente din cele două corolarii sunt de asemenea echivalente cu cele din Teorema 3.1.*

Exemplul 1. Fie $T : c_0 \to c_0$ operatorul liniar dat de

$$T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = ((1 - \frac{1}{n+2})x_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

pentru orice $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \overset{def}{=} \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \mid \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$, unde c_0 este înzestrat cu $\|.\|_\infty$.

Fie $\mathcal{S} = ((c_0, \|.\|_\infty), f)$ un GIFS de ordin 2, unde $f : (c_0)^2 \to c_0$ este dată de

$$f((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \frac{1}{2}T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) + \frac{1}{2}T((y_n)_{n\in\mathbb{N}}),$$

pentru orice $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$.

$\mathcal{S}$ este topologic contractiv dar nu este strict topologic contractiv şi nu este uniform punctual fibrat dar este punctual fibrat şi $\pi : \Omega \to c_0$ este 0.

Exemplul 2. Fie $(X, \|.\|)$ spaţiu Banach şi $T : X \to X$ astfel încât există $m \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $m\|T\| < 1$. Fie de asemenea $(a_i)_{i\in I}$ o familie mărginită de elemente din X.

Vom considera GIIFS-ul $\mathcal{S} = ((X, \|.\|), (f_i)_{i\in I})$ de ordin m, unde $f_i : X^m \to X$ este dat de

$$f_i(x_1, ..., x_m) = T(x_1) + ... + T(x_m) + a_i,$$

pentru orice $x_1, ..., x_m \in X$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, avem că

$$f_{\alpha^1\alpha^2...\alpha^n}(x_1, ..., x_{m^n}) = \sum_{i=1}^{m^n} T^n(x_i) + \sum_{l=1}^{n} T^{l-1}(\sum_{j=1}^{m^{l-1}} a_{\alpha^{l,j}}),$$

pentru orice $\alpha^1\alpha^2...\alpha^n \in_n \Omega$, $x_1, ..., x_{m^n} \in X$ şi

$$\pi(\alpha) = \sum_{l\geq 1} T^{l-1}(\sum_{j=1}^{m^{l-1}} a_{\alpha^{l,j}}),$$

pentru orice $\alpha \in \Omega$.

CAPITOLUL IV

GIIFS-uri CONSTITUITE DINTR-O MULŢIME FINITĂ DE ELEMENTE

Acest capitol este dedicat cazului în care GIIFS-ul este constituit dintr-un număr finit de elemente. În acest sens vom prezenta două tematici, anume vom studia astfel de sisteme constituite din funcţii afine definite pe spaţii normate finit dimensionale şi vom prezenta un nou algoritm pentru generarea imaginii atractorului unui astfel de sistem (care se bazează pe [46]).

Sisteme iterative de funcţii, generalizate şi posibil infinite, constituite dintr-un număr finit de funcţii afine definite pe spaţii normate finit dimensionale

În cazul în care AGIIFS-ul $\mathcal{S} = ((X, \|.\|), (f_i)_{i\in I})$ are proprietatea că I este finită şi X este finit dimensional, lista afirmaţiilor echivalente din rezultatele anterioare poate fi lărgită aşa cum arată Teorema 4.2.

Definiţia 4.1. *Un AGIIFS $\mathcal{S} = ((X, \|.\|), (f_i)_{i\in I})$, astfel încât $(X, \|.\|)$ este finit dimensional şi I este finită, se numeşte Meir-Keeler dacă f_i este Meir-Keeler pentru orice $i \in I$. Un astfel de sistem se numeşte Meir-Keeler hiperbolic dacă există o normă $|||.|||$ pe X astfel încât AGIIFS-ul $((X, |||.|||), (f_i)_{i\in I})$ este Meir-Keeler.*

Definiţia 4.2. *Dat un spaţiu normat X de dimensiune $m \in \mathbb{N}^*$, un corp convex K din X şi $u \in S^{m-1}$ - sfera unitate din X -, definim*

$$\mathcal{A}_u := \mathcal{A}_u(K) = \{(p, q) \in (H_u \cap \partial K) \times (H_{-u} \cap \partial K)\}$$

şi

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}(K) = \bigcup_{u\in S^{m-1}} \mathcal{A}_u,$$

unde perechea (H_u, H_{-u}) este constituită din hiperplanele perpendiculare pe u.

Spunem că (p, q) este o pereche de puncte antipodale în raport cu K dacă $(p, q) \in \mathcal{A}$.

Definiţia 4.3. *Dat un spaţiu normat* $(X, \|.\|)$, $m \in \mathbb{N}^*$ *şi un corp convex* K, *o funcţie* $f : X^m \to X$ *se numeşte non-antipodală în raport cu* K *dacă* $(f(x_1, ..., x_m); f(y_1, ..., y_m)) \notin \mathcal{A}(K)$ *atunci când* $f(K, ...K) \subseteq K$ *şi* $((x_1, ..., x_m); (y_1, ..., y_m)) \in \mathcal{A}(K^m)$. *Un AGIIFS* $\mathcal{S} = ((X, \|.\|), (f_i)_{i \in I})$, *astfel încât* $(X, \|.\|)$ *este finit dimensional şi* I *este finită, se numeşte non-antipodal dacă* f_i *este non-antipodală în raport cu un corp convex* K *pentru orice* $i \in I$.

Definiţia 4.4. *Dat un spaţiu normat* X *de dimensiune* $m \in \mathbb{N}^*$, *un corp convex* K *al lui* X *şi* $u \in S^{m-1}$ *- sfera unitate din* X *-, definim diametrul lui* K *în direcţia* u *astfel:*

$$D(u) = \max\{\|x - y\|_2 \mid x, y \in K \textit{ astfel încât}$$

$$\textit{există } \alpha \in \mathbb{R} \textit{ cu proprietatea că } x - y = \alpha u\}.$$

Remarca 4.1. *Maximul din definiţia anterioară este atins pentru o pereche de puncte aparţinând* ∂K *-bordul topologic al lui* K*- deoarece* $K \times K$ *este convexă şi compactă şi* $\|.\|_2$ *este continuă.*

Definiţia 4.5. *Dat un spaţiu normat* X *de dimensiune* $m \in \mathbb{N}^*$, *un corp convex* K *al lui* X *şi* $u \in S^{m-1}$ *- sfera unitate din* X *-, definim* $\mathcal{D}_u = \{(p, q) \in \partial K \times \partial K \mid D(u) = \|q - p\|_2\}$ *şi* $\mathcal{D} = \bigcup\limits_{u \in S^{m-1}} \mathcal{D}_u$. *Spunem că* $(p, q) \in \mathcal{D}_u$ *este o pereche de puncte diametrale în direcţia lui* u *şi că* $\mathcal{D}$ *este mulţimea de perechi de puncte diametrale ale lui* K.

Teorema 4.1 (vezi [1]). *Dat un spaţiu normat finit dimensional* X *şi un corp convex* K *al lui* X, *mulţimea perechilor de puncte antipodale ale lui* K *coincide cu mulţimea perechilor de puncte diametrale* K, *i.e.* $\mathcal{A} = \mathcal{D}$.

Theorema 4.2 . *Dat un AGIIFS* $\mathcal{S} = ((X, \|.\|), (f_i)_{i \in I})$ *astfel încât* $(X, \|.\|)$ *este finit dimensional şi* I *este finită, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\mathcal{S}$ *este hiperbolic.*
2. Există o funcţie de comparaţie φ *astfel încât* $\mathcal{S}$ *este* φ*-hiperbolic.*
3. $\mathcal{S}$ *are atractor.*
4. $\mathcal{S}$ *este strict topologic contractiv.*
5. $\mathcal{S}$ *este uniform punctual fibrat.*

6. $\mathcal{S}$ este topologic contractiv.
7. $\mathcal{S}$ este Meir-Keeler hiperbolic.
8. $\mathcal{S}$ este non-antipodal.

Exemplul. Fie $\mathcal{S} = ((\mathbb{R}^2, \|.\|_2), f)$ un GIFS de ordin 2, unde $f : (\mathbb{R}^2)^2 \to \mathbb{R}^2$ este dată de

$$f(x, y) = B(x + y),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^2$, cu $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{16} & 0 \end{pmatrix}$. În $\|.\|_2$, $\mathcal{S}$ nu este contractiv, dar este uniform punctual fibrat, deci există o normă în care să fie contractiv (conform Teoremei 4.2).

Un nou algoritm pentru generarea imaginii atractorului unui sistem generalizat iterativ de funcţii, generalizat şi posibil infinit, care este constituit dintr-un număr finit de funcţii

În [23], Strobin şi colaboratorii săi prezintă patru algoritmi pentru generarea imaginii atractorului unui sistem generalizat iterativ de funcţii posibil infinit care este constituit dintr-un număr finit de funcţii, unul dintre ei fiind cel deterministic.

În această secţiune prezentăm un nou algoritm (numit algoritmul cu grilă) pe care îl vom compara cu cel deterministic. Rezultatele se bazează pe lucrarea [46].

Algoritmul deterministic constă în alegerea unei mulţimi finite de puncte căreia i se aplică funcţiile constitutive ale sistemului, obţinându-se astfel o nouă mulţime. Fiecăruia dintre aceste noi puncte i se aplică din nou funcţiile constitutive ale sistemului. Continuând acest procedeu ne vom apropia de atractorul sistemului.

Ideea principala a algoritmului cu grilă este de a simplifica algoritmul deterministic prin divizarea, la fiecare pas, a spaţiului în care lucrăm, în subspaţii mici şi de a alege, în fiecare dintre ele, un singur punct.

I. Prezentarea algoritmilor

Pentru $(x_1, ..., x_M) \in \mathbb{R}^M$, vom folosi următoarea notaţie:

$$[(x_1, ..., x_M)] = ([x_1], ..., [x_M]).$$

În cele ce urmează

$$\mathcal{S} = (([0, D]^M, d), \{f_1, ..., f_L\}),$$

unde $L, M \in \mathbb{N}$ şi d este distanţa euclidiană pe $\mathbb{R}^M$, va fi un GIIFS de ordin $p \geq 2$ (deci $f_i : ([0, D]^M)^p \to [0, D]^M$ pentru orice $i \in \{1, ..., L\}$) constituit din contracţii.

Vom folosi următoarele notaţii:
- $\max\{lip(f_1), ..., lip(f_L)\} \overset{not}{=} C < 1$
- $\beta = pM$.

Vom considera următoarele funcţii:
- $F_{\mathcal{S}} : (P_{cp}([0, D]^M))^p \to P_{cp}([0, D]^M)$ descrisă de

$$F_{\mathcal{S}}(K_1, ..., K_p) = f_1(K_1, ..., K_p) \cup ... \cup f_L(K_1, ..., K_p),$$

pentru orice $K_1, ..., K_p \in P_{cp}([0, D]^M)$

- $G_{\mathcal{S}} : P_{cp}([0, D]^M) \to P_{cp}([0, D]^M)$ descrisă de

$$G_{\mathcal{S}}(K) = F_{\mathcal{S}}(K, ..., K),$$

pentru orice $K \in P_{cp}([0, D]^M)$.

- $(n_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ un şir de numere naturale.

Pentru o mulţime finită $K_0 \in P_{cp}([0, D]^M)$, vom folosi următoarele notaţii:
- $A_k \overset{not}{=} G_{\mathcal{S}}^{[k]}(K_0)$, unde $k \in \mathbb{N}$
- $\widetilde{A}_k \overset{not}{=} \{\frac{D}{n_k}[\frac{n_k}{D} f_l(u_1, ..., u_p)] \mid u_1, ..., u_p \in \widetilde{A}_{k-1}, l \in \{1, ..., L\}\}$,unde $k \in \mathbb{N}^*$

şi $\widetilde{A}_0 = K_0$
- $\frac{D\sqrt{M}}{n_k} \overset{not}{=} \varepsilon_k$,unde $k \in \mathbb{N}$.

Să reamintim algoritmul deterministic pentru generarea imaginii atractorului unui GIIFS constituit dintr-o familie finită de contracţii (vezi [23]).

Programul pseudocod pentru algoritmul deterministic

Read initially defined objects: constants: L, M, finite set: $K_0 \in P_{cp}([0, D]^M)$, mappings: $f_1, ..., f_L$, variables: k, D_0.

Initial values: $D_0 := K_0$.

For k from 1 to $m-1$

$D_1 := G_{\mathcal{S}}(D_0)$

$D_0 := D_1$.

Print D_m.

Programul pseudocod pentru algoritmul cu grilă

Read initially defined objects: constant: L, M, finite set: $K_0 \in P_{cp}([0,D]^M)$, mappings: $f_1, ..., f_L$, sequence: $(n_k)_k$, variables: k, D_0.

Initial values: $D_0 := K_0$.

For k from 1 to $m-1$

$D_1 := \{\frac{D}{n_k}[\frac{n_k}{D} f_l(u_1, ..., u_p)] \mid u_1, ..., u_p \in D_0, l \in \{1, ..., L\}\}$

$D_0 := D_1$.

Print D_m.

II. Complexitatea celor doi algoritmi

A. *Complexitatea algoritmului deterministic este descrisă de funcţia* $\mathcal{C}_c : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *dată de*

$$\mathcal{C}_c(\varepsilon) = (x_0 L^{\frac{1}{p-1}})^{(\frac{1}{\varepsilon})^{\log_{\frac{1}{C}}(p)}},$$

pentru orice $\varepsilon > 0$.

B. *Cazul algoritmului cu grilă*

Vom nota cu y_k numărul punctelor calculate până la pasul k în cadrul algoritmului cu grilă. Deoarece $y_{k+1} \leq L(n_k)^\beta$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, până la pasul N, trebuie să calculăm cel mult $L\sum_{k=1}^{N}(n_k)^\beta = L(D\sqrt{M})^\beta \sum_{k=1}^{N}(\frac{1}{\varepsilon_k})^\beta$ puncte. Avem

$$h(\widetilde{A}_k, A_{\mathcal{S}}) \leq \varepsilon_k + C\varepsilon_{k-1} + C^2\varepsilon_{k-2} + ... + C^{k-2}\varepsilon_2 + C^{k-1}\varepsilon_1 + C^k D\sqrt{M},$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

Prin urmare suntem conduşi la următoarea problemă: pentru N şi $\varepsilon > 0$ astfel încât $\frac{\varepsilon}{C^N} - D\sqrt{M} > 0$, să se determinam într-o prima etapa minimul funcţiei $f : [0,\infty)^N \to [0,\infty)$ dată de

$$f(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N) = \sum_{k=1}^{N}(\frac{1}{\varepsilon_k})^\beta,$$

pentru orice $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N \in [0, \infty)$, cu legătura

$$\varepsilon_N + C\varepsilon_{N-1} + C^2\varepsilon_{N-2} + ... + C^{N-2}\varepsilon_2 + C^{N-1}\varepsilon_1 + C^N D\sqrt{M} = \varepsilon$$

si apoi sa alegem un N care sa minimizeze valoarea obtinuta.

Complexitatea algoritmului cu grilă este descrisă de funcţia $C_g : (0, \infty) \to R$ dată de

$$\mathcal{C}_g(\varepsilon) = (\frac{1}{\varepsilon})^{pM}(1 - C^{\frac{\beta}{\beta+1}})^{-\beta-1}.$$

Remarca 4.2. *Algoritmul cu grilă este mai eficient decât cel deterministic deoarece*

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{\mathcal{C}_g(\varepsilon)}{\mathcal{C}_c(\varepsilon)} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{(\frac{1}{\varepsilon})^{pM}}{(x_0 L^{\frac{1}{p-1}})^{(\frac{1}{\varepsilon})^{\log_{\frac{1}{C}}(p)}}} = 0.$$

Exemplu

În această secţiune vom prezenta unul dintre exemplele din teza. Menţionăm că am considerat $n_k = k^2$.

Fie $\mathcal{S} = (([0,1]^2, d), \{f_1, f_2\})$, unde, pentru $x = (x_1, y_1)$ şi $y = (x_2, y_2)$, avem

$$f_1(x, y) = (0,5x_1 - 0,5y_1 + 0,001x_2 + 0,45; 0,5x_1 + 0,5y_1 + 0,001y_2 - 0,05)$$

şi

$$f_2(x, y) = (0,2x_1 + 0,01x_2 + 0,14y_2 + 0,147; 0,2y_1 + 0,01y_2 + 0,105).$$

Figura 1 este obţinută utilizând algoritmul deterministic, iar figura 2 este obţinută utilizând algoritmul cu grilă.

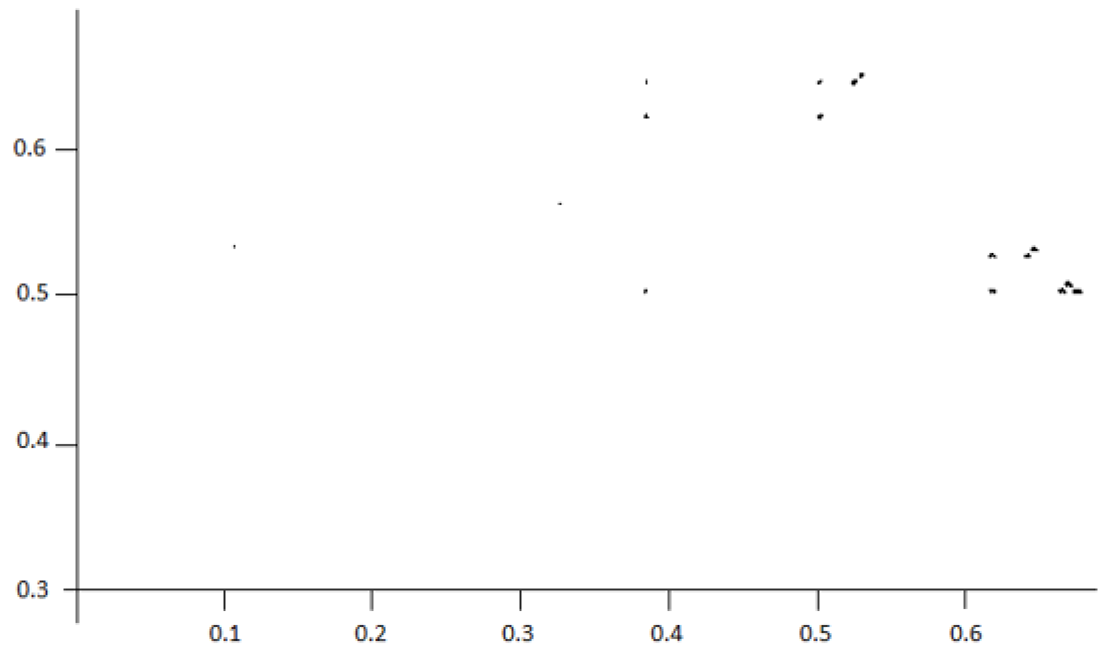

Figura 1

Ambii algoritmi au rulat timp de doua minute. Cel deterministic a parcurs cinci paşi iar cel cu grilă 22 de paşi.

Figura 1 este constituită din $2^{2^5} = 4294967296$ puncte, iar figura 2 din aproximativ 217800 de puncte.

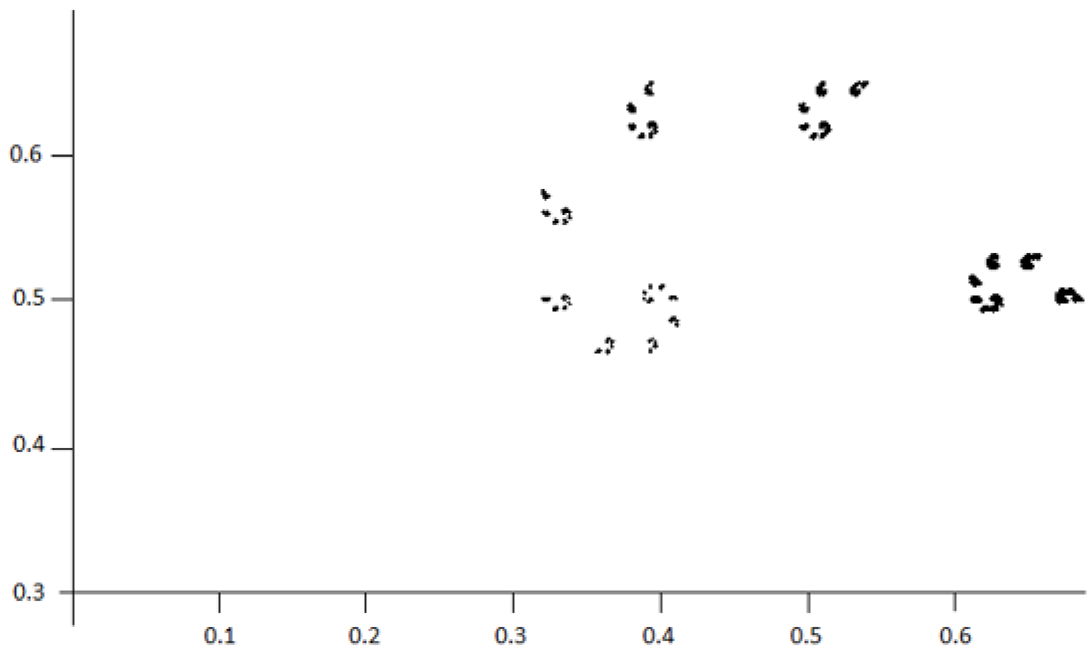

Figura 2

BIBLIOGRAFIE

[1] R. Atkins, M. Barnsley, A. Vince şi D. Wilson, A characterization of hyperbolic affine iterated function systems, Topology Proc., **36** (2010) 189–211.

[2] M.F. Barnsley, Fractals everywhere, Academic Press Professional, Boston, 1993.

[3] M.F. Barnsley and S. Demko, Iterated function systems and the global construction of fractals, Proc. Roy. Soc. London A, 399 (1985) , 243-275.

[4] F. Browder, On the convergence of successive approximations for nonlinear functional equations, Indag. Math., **30** (1968), 27–35.

[5] I. Chiţescu, L. Ioana şi R. Miculescu, Type $\mathcal{A}$ sets and the attractors of infinite iterated function systems, Results. Math., **66** (2014), 511-524.

[6] D. Dumitru, Generalized iterated function systems containing Meir-Keeler functions, An. Univ. Bucur., Mat., **58** (2009), 109-121.

[7] D. Dumitru, Attractors of infinite iterated function systems containing contraction type functions, An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi, Mat. N.S., **59** (2013), 281-298.

[8] D. Dumitru, Arcwise connected attractors of infinite iterated function systems, An. Univ. Ovidius Constanţa, seria Matematică, **22** (2014), 91-98.

[9] D. Dumitru, Contraction-type functions and some applications to GIIFS, An. Univ. Spiru Haret, Ser. Mat.-Inform., **12** (2016), 31-44.

[10] D. Dumitru. L. Ioana, R. Sfetcu şi F. Strobin, Topological version of generalized (infinite) iterated function systems, Chaos Solitons Fractals, **71** (2015), 78-90.

[11] D. Dumitru şi A. Mihail, A sufficient condition for the connectedness of the attractors of infinite iterated function system. An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi Ser. Nouă, Mat., **55** (2009), 87–94.

[12] G.A. Edgar, Measure, Topology and Fractal Geometry, 2nd ed., Springer-Verlag, 2008.

[13] K.J. Falconer, The geometry of fractal sets, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[14] K.J. Falconer, Fractal geometry-Mathematical Foundations and Applications, John Wiley, 1990

[15] H. Fernau, Infinite iterated function systems, Math. Nachr., **170** (1994), 79-91.

[16] F. Georgescu, R. Miculescu şi A. Mihail, A study of the attractor of a φ-max-IFS via a relatively new method, J. Fixed Point Theory Appl.,

(2018) 20:24, https://doi.org/10.1007/s11784-018-0497-6.

[17] G. Gwóźdź-Łukowska şi J. Jachymski, The Hutchinson-Barnsley theory for infinite iterated function systems, Bull. Australian Math. Soc., **72** (2005), 441-454.

[18] M. Hata, On the structure of self-similar sets, Jpn. J. Appl. Math., **2** (1985), 381-414.

[19] M.R. Hille, Remarks on limits sets of infinite iterated function systems, Monatsh. Math., **168** (2012), 215–237.

[20] J.E. Hutchinson, Fractals and self similarity, Indiana Univ. Math. J., **30** (1981), 713-747.

[21] J. Jachymski şi I. Jóźwik, Nonlinear contractive conditions: a comparison and related problems. Banach Center Publ., 77, Polish Acad. Sci., **77** (2007), 123-146.

[22] L. Jaksztas, Infinite iterated function systems depending on a parameter, Bull. Pol. Acad. Sci. Math., **55** (2007), 105-122.

[23] P. Jaros, Ł. Maślanka şi F. Strobin, Algorithms generating images of attractors of generalized iterated function systems, Numer. Algorithms, **73** (2016), 477-499.

[24] A. Kameyama, Distances on topological self-similar sets and the kneading determinants, J. Math. Kyoto Univ., **40** (2000), 603-674.

[25] J. Kigami, Analysis on fractals, Cambridge Univ. Press, 2001.

[26] M. Klimek şi M. Kosek, Generalized iterated function systems, multifunctions and Cantor sets, Ann. Polon. Math., **96** (2009), 25-41.

[27] K. Leśniak, Infinite iterated function systems: a multivalued approach, Bull. Pol. Acad. Sci. Math., **52** (2004), 1-8.

[28] G.B. Lewellen, Self-similarity, Rocky Mt. J. Math., **23** (1993), 1023-1040.

[29] S. L. Lipscomb, Fractals and universal spaces in dimension theory, Springer Verlag, 2009.

[30] B. Mandelbrot, Fractals, forms, chance and dimension, Freeman, San Francisco, 1977.

[31] B. Mandelbrot, The fractal geometry of nature, Freeman, San Francisco, 1982.

[32] Ł. Maślanka şi F. Strobin, Scattered compact spaces are attractors of generalized iterated function systems, Winter School in Abstract Analysis, section Set Theory & Topology, January 27 - February 3, Hejnice, Czech Republic.

[33] J. Matkowski, Integrable solutions of functional equations, Diss. Math., 127 (1975), 68 pp.

[34] R. D. Mauldin, Infinite iterated function systems: theory and applications, Progr. Probab., vol.37 (1995), Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland, 91-110.

[35] D. Mauldin şi M. Urbański, Dimensions and measures in infinite iterated function systems, Proc. London Math. Soc., **73** (1996), 105-154.

[36] F. Mendivil, A generalization of IFS with probabilities to infinitely many maps, Rocky Mt. J. Math., **28** (1998), 1043-1051.

[37] R. Miculescu, Generalized iterated function systems with place dependent probabilities, Acta Appl. Math., **130** (2014), 135-150.

[38] R. Miculescu şi L. Ioana, Some connections between the attractors of an IFS S and the attractors of the sub-IFSs of S, Fixed Point Theory Appl., 2012, 2012:141.

[39] R. Miculescu şi A. Mihail, Lipscomb's space ω^A is the attractor of an infinite IFS containing affine transformations of $l^2(A)$, Proc. Amer. Math. Soc., **136** (2008), 587-592.

[40] R. Miculescu şi A. Mihail, Lipscomb's $L(A)$ space fractalized in $l^p(A)$, Mediterr. J. Math., **9** (2012), 515-524.

[41] R. Miculescu şi A. Mihail, The independence of p of the Lipscomb's $L(A)$ space fractalized in $l^p(A)$, Topol. Appl., **160** (2013), 241-250.

[42] R. Miculescu şi A. Mihail, Alternative characterization of hyperbolic affine infinite iterated function systems, J. Math. Anal. Appl., **407** (2013) 56–68.

[43] R. Miculescu şi A. Mihail, On a question of A. Kameyama concerning self-similar metrics, J. Math. Anal. Appl., **422** (2015), 265-271.

[44] R. Miculescu şi A. Mihail, Remetrization results for possibly infinite self-similar systems, Topol. Methods Nonlinear. Anal., **47** (2016), 333-345.

[45] R. Miculescu şi A. Mihail, A generalization of Matkowski's fixed point theorem and Istrăţescu's fixed point theorem concerning convex contractions, J. Fixed Point Theory Appl., **19** (2017), 1525-1533.

[46] R. Miculescu, A. Mihail şi **S. Urziceanu**, *A new algorithm that generates the image of the attractor of a generalized iterated function system,* acceptat in Numerical Algorithms. doi: 10.1007/s11075-019-00730-w

[47] R. Miculescu şi **S. Urziceanu**, The canonical projection associated with certain possibly infinite generalized iterated function systems as a fixed point, J. Fixed Point Theory Appl., (2018), 20: 141. https://doi.org/10.1007/s11784-018-0618-2.

[48] A. Mihail, The shift space for recurrent iterated function systems, Rev. Roum. Math. Pures Appl., **53** (2008), 339-355.

[49] A. Mihail, A neccessary and sufficient condition for connectivity of the attractor of infinite iterated function systems, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **55** (2010), 147-157.

[50] A. Mihail, The canonical projection between the shift space of an IFS and its attractor as a fixed point, Fixed Point Theory Appl., 2015, Paper No. 75, 15 pp.

[51] A. Mihail şi R. Miculescu, Applications of Fixed Point Theorems in the Theory of Generalized IFS, Fixed Point Theory Appl. Volume 2008, Article ID 312876, 11 pages doi: 10.1155/2008/312876.

[52] A. Mihail şi R. Miculescu, A generalization of the Hutchinson measure, Mediterr. J. Math., **6** (2009), 203–213.

[53] A. Mihail şi R. Miculescu, The shift space for an infinite iterated function system, Math. Rep. Bucur., **61** (2009), 203-213.

[54] A. Mihail şi R. Miculescu, Generalized IFSs on Noncompact Spaces, Fixed Point Theory Appl. Volume 2010, Article ID 584215, 11 pages doi: 10.1155/2010/584215.

[55] P. Moran, Additive functions on intervals and Hausdorff measure, Proc. Camb. Phil. Soc., **42** (1946), 15-23.

[56] M. Nowak, Topological classification of scattered IFS-attractors, Topology Appl., **160** (2013), 1889-1901.

[57] E. Oliveira, The Ergodic Theorem for a new kind of attractor of a GIFS, Chaos Solitons Fractals, **98** (2017), 63–71.

[58] E. Oliveira şi F. Strobin, Fuzzy attractors appearing from GIFZS, Fuzzy Set Syst., **331** (2018), 131-156.

[59] N.A. Secelean, Countable iterated function systems. Far. East J. Dyn. Syst., **3** (2001), 149–167.

[60] N.A. Secelean, Any compact subset of a metric space is the attractor of a CIFS, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, **92** (2001), 77-89.

[61] N.A. Secelean, The invariant measure of a countable iterated function cystem, Seminarberichte aus dem Fachbereich Mathematik, Band **73** (2002), 3-10.

[62] N.A. Secelean, The Hausdorff dimension and the similarity in case of countable iterated function system, Seminarberichte aus dem Fachbereich Mathematik, Band **73** (2002), 41-52.

[63] N.A. Secelean, Some continuity and approximation properties of a countable iterated function system, Math. Pannon., **14** (2003), 237-252.

[64] N.A. Secelean, The fractal interpolation for countable systems of data, Beograd University, Publikacije Electrotehn., Fak., ser. Matematika, **14** (2003), 11-19.

[65] N.A. Secelean, Parameterized curve as attractors of some countable iterated function systems, Arch. Math. Brno, **40** (2004), 287–293.

[66] N.A. Secelean, Generalized countable iterated function systems, Filomat, **25** (2011), 21-36.

[67] N.A. Secelean, Continuous dependence on a parameter of the countable fractal interpolation function, Carpathian J. Math., **27** (2011), 131-141.

[68] N.A. Secelean, The existence of the attractor of countable iterated function systems, Mediterr. J. Math., **9** (2012), 61-79.

[69] N.A. Secelean, Countable Iterated Function Systems, Lambert Academic Publishing, 2013.

[70] N.A. Secelean, Invariant measure associated with a generalized countable iterated function system, Mediterr. J. Math., **11** (2014), 361-372.

[71] N.A. Secelean, Generalized iterated function systems on the space $l^{\infty}(X)$, J. Math. Anal. Appl., **410** (2014), 847-858.

[72] F. Strobin, Attractors of generalized IFSs that are not attractors of IFSs, J. Math. Anal. Appl., **422** (2015), 99-108.

[73] F. Strobin şi J. Swaczyna, On a certain generalisation of the iterated function system, Bull. Aust. Math. Soc., **87** (2013), 37-54.

[74] F. Strobin şi J. Swaczyna, A code space for a generalized IFS, Fixed Point Theory, **17** (2016), 477-493.

[75] T. Szarek şi S. Wedrychowicz, The OSC does not imply the SOCS for infinite iterated function systems, Proc. Amer. Math. Soc., **133** (2005), 437-440.

[76] **S. Urziceanu**, Alternative characterizations of AGIFSs having attractor, Fixed Point Theory, sub tipar.

[77] **S. Urziceanu**, Possibly infinite generalized iterated function systems comprising φ-max contractions, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., sub tipar.

[78] K.R. Wiks, Fractals and hyperfractals, Lectures Notes in Mathematics 1492, Springer-Verlag, Berlin, 1991.