

Omogenizare cu unde Bloch și analiza interacțiunilor fluid-structură

MIHAELA LOREDANA BĂLILESCU

REZUMAT

Lucrarea pentru obținerea atestatului de abilitare cuprinde o selecție a rezultatelor științifice pe care le-am obținut în domeniile teoriei omogenizării și analizei interacțiunilor fluid-structură după dobândirea titlului de doctor în Matematică. Principala motivație din spatele acestui demers o constituie dorința de a descrie succint stadiul actual al cunoașterii în aceste domenii și, de a oferi o imagine de ansamblu asupra contribuțiilor mele în aceste vaste domenii, precum și de a discuta câteva probleme deschise și câteva posibile perspective de dezvoltare a viitoarei mele cariere științifice și academice.

Teza se bazează pe o parte dintre contribuțiile mele originale la aplicarea teoriei omogenizării și a teoriei interacțiunii fluid-structură, contribuții conținute în șaptesprezece articole publicate sau trimise spre publicare în reviste internaționale cu o largă audiență, incluzând nu doar matematicieni, ci și fizicieni, ingineri și cercetători din diferite domenii aplicative și o carte. Aceste rezultate au fost obținute în ultimii doisprezece ani de cercetare efectuată în următoarele arii majore: omogenizare prin metoda spectrală a undelor Bloch, unde m-am concentrat atât asupra coeficienților efectivi sau omogenizați, precum și asupra coeficienților Burnett sau macro coeficienților de ordin superior, și analiza interacțiunilor fluid-structură cu accent pe existența și unicitatea de soluții, împreună cu aspecte numerice. Astfel, metodele omogenizării și a interacțiunii fluid-structură reprezintă nucleul muncii mele științifice realizate în ultimii doisprezece ani.

În afară de două scurte rezumate, unul în limba română și altul în limba engleză, teza conține două părți și o bibliografie cuprinzătoare.

Prima parte, structurată în trei capitole, este dedicată prezentării principalelor mele realizări științifice obținute după finalizarea studiilor doctorale. După un scurt capitol introductiv, în care este prezentat stadiul actual al cercetării în domeniile teoriei omogenizării și interacțiunii fluid-structură, al doilea capitol, divizat în șase secțiuni diferite, cuprinde câteva dintre contribuțiile mele referitoare la teoria omogenizării. Mai precis, sunt prezentate rezultate originale de omogenizare pentru macro coeficienții de ordin superior sau coeficienți Burnett, precum și pentru coeficienții omogenizați sau efectivi. Capitolul se bazează pe articolele [2, 3, 4, 9, 11, 12, 15], proceeding-urile [1, 4, 5] și cartea [3] din lista de lucrări.

În continuare se descrie fiecare contribuție corespunzătoare acestui al doilea capitol. Un prim set de macro coeficienți, cunoscut sub denumirea de coeficienți omogenizați, apar în omogenizarea PDE-urilor în structurile periodice. Dacă energia este crescută sau scara redusă, acești coeficienți nu asigură o aproximație adecvată. Folosind descompunerea Bloch, s-a observat că acești coeficienți corespund celei mai scăzute energii și celei mai mari scări. Acest lucru deschide în mod natural calea către introducerea altor seturi de macro coeficienți care oferă o mai bună aproximație, corespunzătoare energiilor mai mari și a scărilor mai mici, cunoscuți sub numele de coeficienți Burnett sau tensor dispersie. Unul dintre obiectivele mele a fost de a studia și de a compara proprietățile acestora cu cele ale coeficienților omogenizați.

În prima secțiune, corespunzătoare articolului [15], se studiază dependența tensorilor

efectivi și Burnett în funcție de microstructură, considerând mediul periodic cu contrast redus, în structuri unidimensionale și în unele structuri laminate. În mod surprinzător, acești tensori depind de microstructură numai prin intermediul parametrului local de proporționalitate, iar în unele cazuri, ei nu depind deloc de microstructură. Continuând analiza anterioară, în secțiunea a doua, corespunzătoare articolului [12], este descrisă mulțimea în care tensorul Burnett asociat unei structuri periodice unidimensionale aparține, atunci când microstructura variază păstrând proporția de volum. În proceeding-urile [1, 4] se revizuiesc toate aceste proprietăți împreună cu câteva rezultate noi. Obiectul de studiu al secțiunii a treia, corespunzătoare articolului [9], este variația macro coeficienților de ordin superior pentru microstructurile laminate. Se obțin marginile pentru coeficientul de ordin patru, precum și structura sa optimală. Folosind Principiul Blossoming, se arată că acest coeficient nu este negativ în sensul lui Legendre-Hadamard, chiar dacă forma sa de ordin patru este negativă. Generalizând rezultatele anterioare, în secțiunea a patra, corespunzătoare articolului [4], s-a introdus tensorul de dispersie sau coeficienții Burnett în clasa generalizată a microstructurilor de tip Hashin-Shtrikman. În cazul materialelor cu două faze asociate structurilor periodice de tip Hashin-Shtrikman, tensorul dispersie are un minimizator unic, așa numita microstructură Apollonian-Hashin-Shtrikman.

Considerând coeficienții efectivi sau omogenizați, în secțiunea cinci, corespunzătoare articolului [11] și proceeding-ului [5], prin metoda undelor Bloch pentru microstructuri periodice, s-a demonstrat existența termenului straniu clasic din teoria omogenizării pentru EDP-ul asociat operatorului Laplace în \mathbb{R}^N ($N = 3, 4, 5$) în domeniu periodic perforat, cu condiții de tip Dirichlet pe frontiera perforațiilor, când mărimea găurilor converge la zero mai repede decât perioada microstructurii. Dificultatea acestei probleme este dezvoltarea asimptotică a valorilor proprii simple, asociate operatorului Laplace în domeniu perforat, când mărimea găurilor tinde la zero. În articolul trimis spre publicare [3], parțial scris în secțiunea patru, se folosește metoda spectrală pentru a introduce undele Bloch în studiul procesului de omogenizare în cazul clasei generalizate neperiodice a microstructurii de tip Hashin-Shtrikman, aceasta incluzând atât translația, cât și dilatația cu o familie de scări. S-a stabilit rezultatul clasic de omogenizare, prin reprezentarea spectrală a coeficienților omogenizați. Aceasta oferă un nou avantaj spre extinderea analizei spectrale cu unde Bloch la clasa neperiodică, necomutativă a microstructurii. În secțiunea a șasea, corespunzătoare articolului recent trimis spre publicare [2], se consideră omogenizarea unei probleme la limită eliptică, nelocală și fracționară, considerând condiția neomogenă de tip Dirichlet în afara a unui domeniu mărginit $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$. Folosind H -convergența, s-au determinat coeficienții efectivi, considerând ipotezele standard de elipticitate uniformă, de mărginire și de simetrie ale coeficienților. De asemenea, s-a demonstrat că termenul straniu nu apare în problema omogenizată asociată operatorului Laplace fracționar $(-\Delta)^s$ ($0 < s < 1$) în domeniul perforat. Ambele rezultate au fost obținute pentru o clasă generală de microstructuri.

Al treilea capitol, divizat în patru secțiuni diferite, cuprinde contribuțiile mele importante referitoare la teoria interacțiunii fluid-structură, cu privire la analiza numerică a unor probleme relevante, precum și rezultate teoretice interesante despre existența și unicitatea soluțiilor slabe. Capitolul se bazează pe articolele [1, 5, 6, 7, 8, 10] și proceeding-ul [2].

În continuare se descrie fiecare contribuție corespunzătoare capitolului al treilea. În prima secțiune, corespunzătoare articolului [12], versiunea acestuia mai scurtă [10] și proceeding-ul [2], se propune o nouă metodă a caracteristicii pentru discretizarea unei probleme bidimensionale de interacțiune fluid-corp rigid în cazul în care densitățile fluidului și solidului sunt diferite. Ecuațiile sistemului sunt ecuațiile Navier-Stokes pentru partea fluidă, cuplate cu ecuații diferențiale ordinare pentru dinamica solidului. Metoda propusă se bazează pe o

formulare globală slabă, considerând numai termeni definiți în întregul domeniu fluid-rigid. Pentru a lua în considerare derivata materială, s-a construit o funcție caracteristică specială care trimite corpul rigid aproximativ de la timpul de discretizare t_{k+1} la corpul rigid aproximativ la timpul t_k . Rezultate de convergență sunt demonstrate pentru ambele scheme de discretizare: semi-discretă și completă. În secțiunea a doua, corespunzătoare articolului [7], s-a considerat schema Lagrange-Galerkin pentru a aproxima o problemă bidimensională de interacțiune fluid-structură deformabilă. S-a introdus metoda caracteristicii pentru un solid deformabil și s-au enunțat rezultatele de convergență pentru ambele scheme, semi-discretă și completă. În articolul în lucru [1], vor apărea demonstrațiile complete ale acestor rezultate.

Mergând mai departe, în secțiunea a treia, corespunzătoare articolului [6], s-a propus un model nou pentru modelarea mișcării unui fluid viscos și incompresibil. Mai precis, s-a considerat sistemul Navier-Stokes cu condiții la limită stabilite de legea de frecare Coulomb. Cu această condiție la limită, fluidul alunecă pe frontieră dacă componenta tangențială a tensorului tensiune este mare. În caz contrar, se recuperează condiția la limită standard de tip Dirichlet. S-au demonstrat atât existența și unicitatea soluției slabe pentru problema bidimensională, cât și existența a cel puțin unei soluții slabe în cazul tridimensional, împreună cu proprietăți de regularitate și estimarea energiei. De asemenea, s-a enunțat o schemă numerică pentru discretizare completă în spațiu și timp, și s-au realizat câteva simulări numerice pentru două exemple fizice. Generalizând rezultatul anterior, în ultima secțiune, corespunzătoare articolului [5], s-a propus un model nou pentru problemele de interacțiune fluid-structură, compus dintr-un corp rigid și un fluid vâscos și incompresibil, folosind condiția la limită de tip Coulomb. Ecuațiile considerate sunt de tip Navier-Stokes pentru fluid și legea Newton pentru corpul rigid. Sistemul astfel format poate fi scris sub forma unei inegalități variaționale. S-a demonstrat că există o soluție slabă a acestui sistem.

A doua parte a acestei teze prezintă câteva planuri de dezvoltare și de evoluție în carieră. După o scurtă trecere în revistă a parcursului meu științific și academic de până acum, sunt prezentate direcțiile viitoare de cercetare și câteva planuri de dezvoltare pe termen scurt, mediu și lung a carierei mele științifice și academice. De asemenea, se face o scurtă descriere a câtorva probleme deschise pe care aș dori să le abordez în viitor.

Lucrarea se încheie cu o bibliografie cuprinzătoare, menită să illustreze stadiul actual al cunoașterii în aceste domenii vaste ale teoriei omogenizării și interacțiunii fluid-structură.

Principalele mele contribuții originale conținute în această teză pot fi sintetizate astfel:

- efectuarea unui studiu riguros al coeficienților Burnett în structuri periodice și în clasa generalizată a microstructurilor Hashin-Shtrikman;
- obținerea rezultatelor originale asupra unicului minimizator pentru tensorul de dispersie, numit microstructura Apollonian-Hashin-Shtrikman, în cazul materialelor cu două faze asociate cu structura periodică Hashin-Shtrikman;
- obținerea rezultatelor de omogenizare utilizând metoda spectrală a undelor Bloch pentru probleme în medii perforate;
- obținerea unor rezultate noi de omogenizare pentru probleme la limită eliptice, nelo-cale, fracționare, considerând condiții neomogene de tip Dirichlet în afara domeniului;
- elaborarea unei noi metode a caracteristicii pentru discretizarea unei probleme bidimensionale de interacțiune fluid-rigid în cazul densităților fluidului și solidului diferite, și demonstrarea convergenței;

- obținerea unor scheme numerice bazate pe utilizarea noii metode a caracteristicii pentru solide deformabile și demonstrarea convergenței;
- construirea unui model nou pentru modelarea mișcării unui fluid vâcos incompresibil, considerând sistemul Navier–Stokes și legea de frecare Coulomb la limită;
- demonstrarea existenței și unicității (în unele cazuri) considerând noul model matematic pentru mișcarea unui fluid vâcos incompresibil folosind legea frecării Coulomb pe frontieră;
- demonstrarea existenței unei soluții slabe pentru un model nou în sistemul de interacțiune fluid-structură compus dintr-un corp rigid și un fluid vâcos și incompresibil, folosind legea Coulomb.

Rezultatele incluse în această teză au fost obținute în strânsă colaborare cu mai multe instituții academice și de cercetare din România sau din străinătate: Universitatea din Pitești, Universitatea din Chile, Universitatea din Lorraine, Institutul de Cercetare Fundamentală Tata din Bangalore, Universitatea Federală din Santa Catarina, Universitatea din Washington, Universitatea din Pau și Pays de l’Adour. Sunt profund recunoscătoare tuturor co-autorilor mei, Professor C. Conca, A. Ghosh, Dr. T. Ghosh, Professor J. San Martín, Professor J.-F. Scheid, Professor T. Takahashi, and Professor M. Vanninathan, pentru o frumoasă colaborare, pentru contribuția lor importantă, pentru sfaturile utile și pentru discuțiile interesante pe care le-am avut de-a lungul anilor. Toate aceste rezultate ar putea deschide perspective noi și promițătoare pentru dezvoltări ulterioare și pentru viitoare colaborări cu cercetători de renume din țară și din străinătate.