Universitatea Naţională de Ştiinţă şi Tehnologie Politehnica Bucureşti
Centrul Universitar Piteşti
Şcoala Doctorală Interdisciplinară - Domeniul Matematică
Str. Târgul din Vale nr. 1
110040 Piteşti, România

Integralele Choquet şi Sugeno. Teorie şi aplicaţii.

The Choquet and Sugeno integrals. Theory and Applications.

Student doctorand Irina - Mădălina MANEA (GIURGESCU)
Adresă de e-mail: madalina_giurgescu@yahoo.com

Rezumatul tezei de doctorat

Sub îndrumarea Prof. dr. Mirela ŞTEFĂNESCU şi a Prof. dr. Ion CHIŢESCU

Piteşti, 2023

Cuprins

Cuvinte şi fraze cheie: Măsuri monotone, Măsuri nonaditive, Funcţii măsurabile, Integrale nonlineare, Integrala Choquet, Integrala Sugeno, Limita unei secvenţe generalizate, Calcul aproximativ, Fuziune de date, Instrument de agregare, Problema inversă a fuziunii de informaţii, Exploatarea datelor, Deschidere, Anxietate, Modelul BigFive, EEG, HighAlpha, HighBeta, LowAlpha, LowBeta, Delta, MidGamma, NeuroSky, Unde, Investitor virtual.

2020 Clasificarea disciplinelor de matematică (Mathematics Subject Classification): 03E72, 28A25, 28E10, 94D05

Introducere

Obiectivul general. Scopul acestei teze de doctorat este de a dezvolta noi direcţii pentru aplicaţiile teoriei măsurii generalizate, numită şi teoria fuzzy, folosind integralele Choquet şi Sugeno.

Consideraţii generale. Teoria măsurii este o ramură a analizei matematice care studiază măsurile, funcţiile măsurabile şi integralele. O măsură este o funcţie care asociază un număr unei submulţimi a unei mulţimi date. Această noţiune a fost dezvoltată datorită necesităţii de a efectua integrarea pe mulţimi arbitrare, şi nu doar pe intervalele reale pe care se integra de obicei.

Teoria măsurii generalizată a apărut din teoria clasică a măsurii prin procesul de generalizare(vezi [4], [11], [17], [20], [39], [40], [48], [55], [56], [63], [64]). Măsurile clasice sunt funcţii pe mulţimi nonegative cu valori reale, fiecare definită pe o clasă specifică de submulţimi ale unei mulţimi universale date, care satisfac anumite cerinţe axiomatice. Una dintre aceste cerinţe, crucială pentru măsurile clasice, este cunoscută sub numele de cerinţa aditivităţii. Această cerinţă este, în principiu, ca măsura reuniunii (finită sau infinită numărabilă) a oricărei familii recunoscute de mulţimi care sunt disjuncte în perechi, să fie egală cu suma măsurilor mulţimilor individuale din reunire. În teoria măsurii generalizate, cerinţa de aditivitate este înlocuită cu o cerinţă considerabil mai slabă. Orice funcţie definită pe o mulţime cu valoari reale μ dintr-o clasă dată de mulţimi care 'dispare' pe mulţimea vidă (a.î. $\mu(\emptyset) = 0$ este acceptată în teoria măsurii generalizate ca măsură (vezi[64]). O ramură crucială a teoriei măsurii generalizate o reprezintă integralele nonlineare. Cele mai semnificative integrale nonlineare sunt integrala Choquet şi integrala Sugeno(vezi [3], [5], [6], [13], [16], [18], [19], [27], [33], [43], [64], [65]). În literatura de specialitate, anumiţi matematicieni folosesc denumirile: teoria fuzzy, măsuri fuzzy sau de integrale fuzzy.

Motivaţia studiului prezentat în această teză este dată de faptul că teoria fuzzy şi integralele fuzzy au o aplicabilitate foarte mare într-o varietate de domenii. În ultimii ani, mulţi matematicieni au fost interesaţi să găsească diverse aplicaţii ale teoriei fuzzy şi ale integralelor fuzzy.

În consecinţă, am ales ca zonă de studiu pentru această teză, măsurile generalizate şi integralele Choquet şi Sugeno, tratate din punct de vedere al teoriei şi al aplicaţiilor.

Am ales domeniul economic, mai precis piaţa de capital. Am ales acest domeniu, deoarece nu este suficient acoperit în literatura de specialitate din punctul de vedere al teoriei fuzzy.

Am creat un nou model matematic de decizie, bazat pe teoria fuzzy, mai precis integrala Choquet (vezi[12]).

Modelul nostru matematic poate fi utilizat în diverse situaţii de decizie, în diverse domenii ale economiei.

Un alt domeniu ales de noi a fost cel al psihologiei, care nu este suficient acoperit în literatura de specialitate din punctul de vedere al teoriei fuzzy. Un alt motiv pentru care am ales psihologia este acela că este un domeniu vast, în care cercetarea este continuă, iar neuroştiinţa este în continuă dezvoltare.

Am dezvoltat câteva modele matematice bazate pe teoria fuzzy în domeniul psihologiei. Mai precis, am folosit integrala Choquet pentru a determina nivelul de deschidere (vezi [23], [24] şi [26]) şi nivelul de anxietate (vezi [14] şi [25]) pentru anumiţi subiecţi voluntari utilizaţi în procesul nostru de cercetare.

Nu în ultimul rând, am ales domeniul calculului aproximativ, deoarece acesta fusese deja abordat pentru integrala Choquet (vezi[9]). Scopul nostru principal a fost să furnizăm anumite proceduri practice pentru calculul aproximativ (cu precizie prealocată) al integralei Sugeno a unei funcţii măsurabile pozitive generale care respectă o măsură generalizată monotonă (vezi[10]). În acest scop, folosim metodele noastre în doi paşi (metoda simplă în doi paşi şi metoda topologică folosind teorema de convergenţă iterată). Metodele menţionate mai sus reduc calculul general la calcul binecunoscut în cazul finit discret, care poate fi realizat cu metode asistate de calculator.

Descrierea tezei. Această teză este dedicată studiului de noi direcţii ale aplicaţiilor teoriei măsurii generalizate, folosind integralele Choquet şi Sugeno.

Direcţiile studiate de noi sunt: teoria deciziei, aplicaţii în domeniul Data Mining (instrument de fuziune) şi calcul aproximativ, în următoarele domenii: piaţa de capital ca domeniu specific al economiei, psihologiei şi calculelor matematice.

În zona pieţei de capital am colaborat cu o companie din domeniu, numită Confident Invest.

În domeniul psihologiei am colaborat cu psihologii Institutului de Studii, Cercetare, Dezvoltare şi Inovare al Facultăţii Titu Maiorescu din Bucureşti, precum şi cu specialişti ai Academiei Tehnice Militare din Bucureşti.

În **Capitolul 1**, intitulat **Preliminarii**, menţionăm notaţii şi terminologii folosite în această teză. Mai exact, introducem principalele concepte legate de Teoria Măsurii Generalizate, cele mai importante fiind legate de măsurile generalizate, integralele nonliniare Choquet şi Sugeno.

Capitolul 2, intitulat **Aplicaţie în economie a integralei Choquet: În căutarea Investitorilor Virtuali**, este dedicat studiului unui nou model matematic de decizie bazat pe teoria fuzzy, mai precis integrala Choquet, într-o anumită ramură a economiei, mai exact, în piaţa de capital. Introducem o metoda de selectare a celor mai probabili viitori clienţi investitori (investitori virtuali) ai unei companii de brokeraj din piaţa de capital.

Rezultatele prezentate în acest capitol pot fi găsite în [12].

În **Capitolul 3**, intitulat **Aplicaţii în psihologie ale integralei Choquet**, este dedicat studiului bazat pe teoria fuzzy, mai precis integrala Choquet, în psihologie. Mai exact, introducem câteva modele matematice care descriu modul în care sunt procesate undele de tip EEG pentru a caracteriza nivelul de Deschidere şi nivelul de Anxietate.

Rezultatele pentru Deschidere pot fi găsite în [23], [24], [26] şi pentru Anxietate în [14], [25].

Capitolul 4, intitulat **Calculul aproximativ al integralei Sugeno**, este dedicat studiului unei proceduri practice pentru calcularea aproximativă (cu precizie preasignată) a integralei Sugeno a unei funcţii măsurabile pozitive generale care respectă o măsură generalizată monotonă. În acest scop, folosim metodele noastre în doi paşi (metoda simplă în doi paşi şi metoda topologică folosind teorema de convergenţă iterată). Metodele menţionate mai sus reduc calculul general la calcul binecunoscut în cazul finit discret, care poate fi realizat cu metode asistate de calculator.

Rezultatele acestui capitol au fost publicate în [10].

Chapter 1

Preliminarii

În acest capitol, prezentăm notaţiile şi noţiunile teoretice utilizate în această teză. Introducem principalele concepte legate de Teoria Măsurii Generalizate, cele mai importante fiind legate de măsurile generalizate, integralele nonliniare Choquet şi Sugeno.

1.1 Măsuri generalizate

Considerând o mulţime nevidă T şi o clasă de mulţimi $\mathbf{F} \subset \mathcal{P}(T)$ astfel încât $\emptyset \in \mathbf{F}$, spunem că funcţia $\mu : \mathbf{F} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ este o *măsură generalizată* (sau *o măsură monotonă*) dacă are următoarele proprietăţi:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(A) \leq \mu(B)$, unde $A, B \in \mathbf{F}$ şi $A \subset B$.

1.1.1 Noţiuni teoretice generale

Prin $\mathbb{N}$ înţelegem mulţimea $\{0, 1, 2, \cdots\}$ şi prin $\mathbb{N}^*$ înţelegem $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Folosim notaţiile: $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, \infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

Definiţia 1.1. *Clasa tuturor submulţimilor lui X se numeşte mulţimea parţilor lui X, şi se notează $\mathcal{P}(X)$ a.î. $\mathcal{P}(X) = \{A | A \subset X\}$.(vezi[64])*

Definiţia 1.2. *Dacă E este o mulţime, mulţimea acelor elemente ale lui X care nu sunt în E se numeşte complementara lui E. Se notează $\overline{E}$.(vezi[64])*

Definiţia 1.3. *O clasă nevidă **R** se numeşte inel dacă şi numai dacă $\forall$ E, $F \in$ **R**, $E \cup F \in$ **R** şi E-$F \in$ **R**.(vezi[64])*

Definiţia 1.4. *O clasă nevidă $\boldsymbol{R}$ se numeşte algebră dacă şi numai dacă $\forall$ E, $F \in \boldsymbol{R}$ avem $E \cup F \in \boldsymbol{R}$, $E - F \in \boldsymbol{R}$ şi $\overline{E} \in \boldsymbol{R}$.(vezi[64])*

Teorema 1.1.[vezi[64]] *O algebră este un inel care îl conţine pe X şi invers, un inel care îl conţine pe X este o algebră.*

Propoziţia 1.1.[vezi[64]] *Dacă* $\mathbf{R}$ *este un inel, atunci* $\mathbf{R} \cup \{E|\overline{E} \in \mathbf{R}\}$ *este o algebră.*

Definiţia 1.5. *O clasă nevidă $\boldsymbol{F}$ se numeşte σ-inel dacă şi numai dacă $\forall E, F \in \boldsymbol{F}$ avem $E - F \in \boldsymbol{F}$ şi $\forall E_i \in \boldsymbol{F}$, $i = 1, 2, \ldots$ avem $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \boldsymbol{F}$.(vezi[64])*

Definiţia 1.6. *O σ-algebră (sau σ-câmp) este un σ-inel care îl conţine pe X.(vezi[64])*

Propoziţia 1.2.[vezi[64]] *Dacă* $\mathbf{F}$ este un *σ-inel, atunci* $\mathbf{F} \cup \{E|\overline{E} \in \mathbf{F}\}$ *este o σ-algebră.*

Fie X o mulţime nevidă şi fie $\mathbf{C}$ o clasă nevidă de submulţimi ale lui X. Fie $\mu : \mathbf{C} \to [0, \infty]$ o funcţie nenegativă extinsă cu valoari reale.

Facem următoarele acorduri(vezi[64]):

$$0 \times \infty = \infty \times 0 = 0$$

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

$$\infty - \infty = 0$$

$$\sum_{i \in \emptyset} a_i = 0, \text{unde}\{a_i\}\text{este o secvenţă de numere reale .}$$

Definiţia 1.7. *Funcţia $\mu : \boldsymbol{C} \to [0, \infty]$ se numeşte măsură generalizată pe $(X, \boldsymbol{C})$ dacă şi numai dacă $\mu(\emptyset) = 0$ când $\emptyset \in \boldsymbol{C}$.(vezi [64])*

Definiţia 1.8. *Funcţia $\mu : \boldsymbol{C} \to [0, \infty]$ se numeşte măsură monotonă pe (X,$\boldsymbol{C}$) dacă şi numai dacă satisface următoarele cerinţe(vezi[64]):*

1. *$\mu(\emptyset) = 0$ când $\emptyset \in \boldsymbol{C}$*
2. *$E \in \boldsymbol{C}$, $F \in \boldsymbol{C}$ şi $E \subset F$ implică $\mu(E) \leq \mu(F)$.*

Note: Pentru măsurile monotone definite mai sus, în literatura de specialitate se mai foloseşte şi denumirea de *măsuri fuzzy*.(vezi[64])

Remarci:

1. O măsură monotonă μ se numeşte *semicontinuă inferior (sau semicontinuă de jos)* dacă şi numai dacă $\{\mathrm{E}_n\} \subset \mathbf{C}$, $\mathrm{E}_1 \subset \mathrm{E}_2 \subset \ldots$ şi $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathbf{C}$ implică $\lim_n \mu(E_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$.
2. O măsură monotonă μ se numeşte *semicontinuă superior (sau semicontinuă de sus)* dacă şi numai dacă $\{\mathrm{E}_n\} \subset \mathbf{C}$, $\mathrm{E}_1 \supset \mathrm{E}_2 \supset \ldots$,$\mu(\mathrm{E}_1)<\infty$ şi $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathbf{C}$ implică $\lim_n \mu(E_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)$.
3. Dacă o măsură satisface 1) şi 2) atunci ea se numeşte *măsură monotonă continuă.*

Orice măsură $\sigma-$aditivă (adică clasică) este în acelaşi timp continuă inferior şi continuă superior.(vezi[64])

Definiţia 1.9. *O măsură monotonă μ se numeşte normalizată dacă şi numai dacă $X \in \boldsymbol{C}$ şi $\mu(X)=1$.(vezi[64])*

Definiţia 1.10. *Fie $\mu : \boldsymbol{C} \to [0, \infty]$. μ se numeşte aditivă dacă şi numai dacă $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$, unde $E, F \in \boldsymbol{C}$, $E \cup F \in \boldsymbol{C}$ şi $E \cap F = \emptyset$.(vezi[64])*

Definiţia 1.11. *Fie $\mu : \boldsymbol{C} \to [0, \infty]$. μ se numeşte superaditivă dacă şi numai dacă $\mu(E \cup F) \geq \mu(E) + \mu(F)$, unde $E, F \in \boldsymbol{C}$, $E \cup F \in \boldsymbol{C}$ şi $E \cap F = \emptyset$.(vezi[64])*

Definiţia 1.12. *Fie $\mu : \boldsymbol{C} \to [0, \infty]$. μ se numeşte subaditivă dacă şi numai dacă $\mu(E \cup F) \leq \mu(E) + \mu(F)$, unde $E, F \in \boldsymbol{C}$, $E \cup F \in \boldsymbol{C}$.(vezi[64])*

Definiţia 1.13. *μ se numeşte finit aditivă dacă şi numai dacă $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)$, unde $\{E_1, \ldots, E_n\}$ este o clasă de mulţimi disjuncte din $\boldsymbol{C}$, a căror reuniune este tot în $\boldsymbol{C}$.(vezi[64])*

Definiţia 1.14. *μ se numeşte numărabil aditivă dacă şi numai dacă $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$, unde $\{E_n\}$ este o secvenţă de mulţimi disjuncte din $\boldsymbol{C}$, a căror reuniune este tot în $\boldsymbol{C}$.(vezi[64])*

Definiţia 1.15. *μ se numeşte subtractivă dacă şi numai dacă $E \in \boldsymbol{C}, F \in \boldsymbol{C}$ şi $E \subset F$, F-E $\in \boldsymbol{C}$, μ (E)$< \infty$ implică μ(F-E)= μ(F)- μ(E).(vezi[64])*

Definiţia 1.16. *μ se numeşte măsură pe $\boldsymbol{C}$ dacă şi numai dacă ea este numărabil aditivă şi există E$\in$ $\boldsymbol{C}$ astfel încât μ(E)$< \infty$.(vezi[64])*

Definiţia 1.17. *Fie μ o măsură pe $\boldsymbol{C}$. Spunem că o mulţime E din $\boldsymbol{C}$ are măsură finită dacă şi numai dacă μ(E)$< \infty$.(vezi[64])*

Definiţia 1.18. *Fie μ o măsură pe $\boldsymbol{C}$. Spumen că o mulţime E din $\boldsymbol{C}$ are măsură σ-finită dacă şi numai dacă există o secvenţă de mulţimi $\{E_n\}$ din $\boldsymbol{C}$ astfel încât $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ şi $\mu(E_n) < \infty$, n=1,2,.... (vezi[64])*

Definiţia 1.19. *μ este finită, respectiv σ-finită dacă şi numai dacă pentru orice E din $\boldsymbol{C}$, oricare $\mu(E)$ este finită, respectiv σ-finită. (vezi[64])*

Definiţia 1.20. *μ este completă dacă şi numai dacă $E \in \boldsymbol{C}$, $F \subset E$ şi $\mu(E)=0$ implică $F \in \boldsymbol{C}$. (vezi[64])*

1.1.2 Funcţii măsurabile. Spaţii măsurabile

Definiţia 1.21. *Perechea $(X,\boldsymbol{F})$ se numeşte spaţiu măsurabil, unde F este un σ-inel sau o σ-algebră. (vezi[64])*

Definiţia 1.22. *Tripletul $(X,\boldsymbol{F}, \mu)$ se numeşte spaţiu măsurabil generalizat (spaţiu măsurabil monoton), dacă $(X,\boldsymbol{F})$ este un spaţiu măsurabil şi $\mu : \boldsymbol{F} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ este o măsură monotonă. (vezi[64])*

Fie $(X, \mathbf{F})$ un spaţiu măsurabil, $\mu : \mathbf{F} \to [0, \infty)$ o măsură monotonă (sau o măsură monotonă continuă, semicontinuă), şi $\mathbf{B}$ un câmp Borell pe $(-\infty, \infty)$.

Definiţia 1.23. *O funcţie cu valori reale pe X, $f : X \to (-\infty, \infty)$, este $\boldsymbol{F}$-măsurabilă (sau simplu "măsurabilă" dacă nu există confuzii) dacă şi numai dacă*

$$f^{-1}(B) = \{x|f(x) \in B\} \in \boldsymbol{F} \tag{1.1}$$

pentru orice mulţime Borel $B \in \boldsymbol{B}$. Mulţimea tuturor funcţiilor $\boldsymbol{F}$-măsurabile se notează cu $\boldsymbol{G}$. Mulţimea tuturor funcţiilor $\boldsymbol{F}$-măsurabile va fi notată cu $\mathbb{M}_+(\boldsymbol{F})$. (vezi[64])

Teorema 1.2.[vezi[64]] *Dacă $f : X \to (-\infty, \infty)$ este o funcţie cu valori reale, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(1) *f este măsurabilă;*

(2) $\{x|f(x) \geq \alpha\} \in \mathbf{F}$ *pentru oricare* $\alpha \in (-\infty, \infty)$;

(3) $\{x|f(x) > \alpha\} \in \mathbf{F}$ *pentru oricare* $\alpha \in (-\infty, \infty)$;

(4) $\{x|f(x) \leq \alpha\} \in \mathbf{F}$ *pentru oricare* $\alpha \in (-\infty, \infty)$;

(5) $\{x|f(x) < \alpha\} \in \mathbf{F}$ *pentru oricare* $\alpha \in (-\infty, \infty)$.

Corolarul 1.1.[vezi[64]] *Dacă f este o funcţie măsurabilă, atunci* $\{x|f(x) = \alpha\} \in \mathbf{F}$ *pentru oricare* $\alpha \in (-\infty, \infty)$.

Teorema 1.3.[vezi[64]] *Dacă* $\{f(n)\}$ *este o secvenţă de funcţii măsurabile, şi*

$$h(x) = \sup_n \{f_n(x)\},$$
$$g(x) = \inf_n \{f_n(x)\},$$

pentru orice $x \in X$, *atunci h şi g sunt măsurabile.*

Corolarul 1.2.[vezi[64]] *Dacă* $\{f(n)\}$ *este o secvenţă de funcţii măsurabile, şi*

$$\overline{f}(x) = \overline{\lim_n}\{f_n(x)\},$$
$$\underline{f}(x) = \underline{\lim_n}\{f_n(x)\},$$

atunci $\overline{f}$ şi $\underline{f}$ *sunt măsurabile. În plus, dacă există* $\lim_n f_n$ *, atunci, este de asemenea măsurabilă.*

1.2 Integrala Choquet

Fie $(X, \mathbf{F}, \mu)$ un spaţiu măsurabil. în care, X este o mulţime nevidă, $\mathbf{F}$ este o σ-algebră a submulţimilor lui X, şi $\mu : \mathbf{F} \to [0, \infty)$ este o măsură clasică, nonnegativă şi σ-aditivă cu $\mu(A) < \infty$ pentru cel puţin un $A \in \mathbf{F}$. X se numeşte mulţime universală şi poate să nu fie neapărat finită. În acest capitol, presupunem că μ este σ-finită, şi că există $\{A_i\} \subset \mathbf{F}$, astfel încât $\mu(A_i) < \infty$ pentru orice $i = 1, 2, \ldots$ şi $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = X$.(vezi[64])

Definiţia 1.24. *O funcţie* $s : X \to (-\infty, \infty)$ *de forma* $\sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}$ *se numeşte funcţie simplă, unde fiecare* a_i *este o constantă reală,* $A_i \in \boldsymbol{F}$*, şi* χ_{A_i} *este o funcţie caracteristică a lui* A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$.*(vezi[64])*

Definiţia 1.25. *Fie f o funcţie măsurabilă nonnegativă definită pe X. Integrala Lebesgue a lui f care respectă măsura μ este definită astfel*

$$\int f d\mu = \lim_{j\to\infty} \int s_j d\mu = \lim_{j\to\infty} \sum_{i}^{m_j} a_{ji}\mu(A_{ji}) \tag{1.2}$$

unde oricare $s_j = \sum_i^{m_j} a_{ji}\chi_{A_{ji}}$ *este o funcţie simplă şi* $\{s_j\}$ *este un şir nedescrescător cu* $\lim_{j\to\infty} s_j = f$.*(vezi [64])*

Definiţia 1.26. *Integrala Choquet a unei funcţii măsurabile nonnegative f care respectă o măsură monotonă μ pe o mulţime măsurabilă A, notată cu* $(C)\int_A f d\mu$, *este definită prin formula:*

$$(C)\int_A f d\mu = \int_0^{\infty} \mu(F_\alpha \cap A) d\alpha, \tag{1.3}$$

unde $F_\alpha = \{x|f(x) \geq \alpha\}$ *for* $\alpha \in [0,\infty)$. *Dacă* $A = X$, *atunci notaţia uzuală pentru* $(C)\int_X f d\mu$ *este* $(C)\int f d\mu$.*(vezi[64])*

Teorema 1.4.[vezi[64]] *Fie* $\mu(A)$ *finită. Atunci,*

$$(c)\int_A f d\mu = \int_0^\infty \mu(F_{\alpha+} \cap A) d\alpha, \tag{1.4}$$

unde $F_{\alpha+} = \{x|f(x) > \alpha\}$ pentru $\alpha \in [0,\infty)$.

Spre deosebire de integrala Lebesgue, integrala Choquet este în general nonliniară şi respectă integrandul său datorită nonaditivităţii lui μ. În acest sens, putem avea

$$(c)\int (f+g)d\mu \neq (C)\int f d\mu + (C)\int g d\mu \tag{1.5}$$

pentru anumite funcţii măsurabile nonnegative f şi g.(vezi[64])

Teorema 1.5.[vezi[64]] *Fie* f *şi* g *funcţii măsurabile nonnegative pe* $(X, \mathbf{F}, \mu)$, A *şi* B *mulţimi măsurabile şi fie* a *o constantă reală nonnegativă. Atunci,*

(1) $(C)\int_A 1 d\mu = \mu(A)$

(2) $(C)\int_A f d\mu = (C)\int f \cdot \chi_A d\mu$

(3) Dacă $f \leq g$ pe A, atunci $(C)\int_A f d\mu \leq (C)\int_A g d\mu$

(4) Dacă $A \subset B$ atunci $(C)\int_A f d\mu \leq (C)\int_B f d\mu$;

(5) $(C)\int_A af d\mu = a \cdot (C)\int_A f d\mu$

Teorema 1.6.[vezi[64]] $(C)\int_A f d/mu = 0$ *dacă* $\mu(\{x|f(x) > 0\} \cap A) = 0$, *a.î.,* $f = 0$ *pe* A *aproape peste tot; invers, dacă măsura monotonă* μ *este continuă inferior şi* $(C)\int_A f d\mu = 0$, *atunci* $\mu(\{x|f(x) > 0\} \cap A) = 0$.

Teorema 1.7.[vezi[64]] *Pentru orice constantă* c *care satisface* $f + c \geq 0$, *avem:*

$$(C)\int_A (f+c)d\mu = (C)\int_A f d\mu + c \cdot \mu(A). \tag{1.6}$$

Acum vom considera un spaţiu general măsurabil.

Reamintim faptul că o funcţie $\mathbf{F}$-simplu pozitivă este o funcţie $f : X \to \mathbf{R}_+$ de forma $f = \sum_{i=1}^n a_i \varphi(A_i)$, unde $A_i \in \mathbf{F}$, $a_i \in \mathbf{R}_+$ şi $\varphi(A_i)$ este funcţia caracteristică(indicator) pe A_i, pentru orice i. Putem considera că mulţimile A_i sunt are reciproc disjuncte şi că $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$.(vezi[64])

De asemenea, fie $\mu : \mathbf{F} \to \mathbf{R}_+$ o măsură monotonă. Atunci, se poate demonstra că integrala Choquet a lui f care respectă μ este egală cu $(C)\int f d\mu = \sum_i^n (a_i - a_{i-1})\mu(A_i \bigcup A_{i+1} \bigcup ... \bigcup A_n)$ cu convenţia $a_0 = 0$. Această formulă este coerentă, a.î. valoarea pe care o furnizează depinde doar de f.(vezi[64])

Cea mai populară utilizare a formulei anterioare este în cazul $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ şi $\mathbf{F} = \mathbf{P}(X)$. Astfel, considerăm o permutare $\{1_*, 2_*, \cdots n_*\}$ a lui $\{1, 2, \cdots, n\}$ astfel încât $f(1_*) \leq f(2_*) \leq ... \leq f(n_*)$ avem (cu convenţia $f(0_*) = 0$):

$(C)\int f d\mu = \sum_i^n (f(i_*) - f((i-1)_*))\mu(i_*, (i+1)_*, ..., n_*)$.(vezi[64])

1.3 Integrala Sugeno

Considerăm un spaţiu monoton măsurabil $(T, \mathcal{T}, \mu)$ şi o funcţie $f \in M_+(\mathcal{T})$ a.î. $f : T \to \mathbf{R}$ este măsurabilă şi positivă. Pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}_+$ definim mulţimea

$$F_\alpha(f) = \{t \in T |\, f(t) \geq \alpha\} \in \mathcal{T}.$$

Scriem de multe ori F_α în loc de $F_\alpha(f)$. Acest lucru ne permite să considerăm funcţia $\varphi : \mathbf{R}_+ \to \overline{\mathbf{R}}_+$, dată prin $\varphi(\alpha) = \mu(F_\alpha(f))$, care este descrescătoare.(vezi[64])

Pentru oricare $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}_+$, scriem

$$\sup_{\alpha \in A} \alpha \wedge \mu(F_\alpha(f)) \stackrel{def}{=} \sup\{\alpha \wedge \mu(F_\alpha(f)) |\, \alpha \in A\}.(vezi[64])$$

Definiţia 1.27. *Integrala Sugeno a lui f care respectă μ este*

$$(S)\int f d\mu \stackrel{def}{=} \sup_{\alpha \in [0,\infty)} \alpha \wedge \mu(F_\alpha(f)) \in \overline{\mathbf{R}}_+.(vezi[64])$$

În cazul $(S)\int f d\mu < \infty$, spunem că *f este integrabilă Sugeno respectând μ*.(vezi[64])

Este clar că

a) $(S)\int f d\mu = \sup_{\alpha \in (0,\infty)} \alpha \wedge \mu(F_\alpha(f))$.(vezi[64])

b) $(S)\int f d\mu \leq \mu(T)$, prin urmare, în cazul $\mu(T) < \infty$, oricare $f \in M_+(\mathcal{T})$ este integrabilă Sugeno respectând μ.(vezi[64])

c) Dacă f, g sunt în $M_+(\mathcal{T})$, $f \leq g$, avem

$$(S)\int f d\mu \leq (S)\int g d\mu.(vezi[64])$$

În consecinţă, dacă g este integrabilă Sugeno, rezultă că şi f este integrabilă Sugeno.

d) Pentru oricare $a \in \mathbf{R}_+$, integrala Sugeno a funcţiei constante egală cu a este

$$(S)\int a d\mu = a \wedge \mu(T)\,.(vezi[64])$$

Teorema 1.8.[vezi[64]] *Asumăm că f, g sunt integrabile Sugeno respectând μ. În cazul în care există $0 < \varepsilon < \infty$ astfel încât $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ pentru orice $x \in T$, avem*

$$\left|(S)\int f d\mu - (S)\int g d\mu\right| \leq \varepsilon.$$

Corolarul 1.3.[vezi[64]] *Fie $(f_n)_n$ un şir de funcţii integrabile Sugeno care respectă μ şi fie f o funcţie integrabilă Sugeno care respectă μ. Asumăm că $f_n \underset{n}{\overset{u}{\to}} f$. Atunci*

$$(S)\int f_n d\mu \underset{n}{\longrightarrow} (S)\int f d\mu.$$

Teorema 1.9.[vezi[64]] *Asumăm că μ este continuă inferior. Atunci, pentru orice şir $(f_n)_n \subset M_+(\mathcal{T})$ şi pentru orice $f \in M_+(\mathcal{T})$ astfel încât $f_n \nearrow_n f$, avem*

$$(S)\int f d\mu = \lim_n (S)\int f_n d\mu = \sup_n (S)\int f_n d\mu.$$

Integrala Sugeno este nonliniară, nefiind (pozitivă) omogenă.

Chapter 2

Aplicaţie în economie a integralei Choquet: În căutarea Investitorilor Virtuali

În acest capitol descriem un model matematic nou, de decizie, bazat pe teoria fuzzy, mai exact, bazat pe integrala Choquet.

Modelul nostru poate fi folosit în diverse situaţii de decizie, în diverse domenii ale economiei, dar noi am ales pentru cercetările noastre rezultatele dintr-un anumit domeniu al economiei, mai exact, din domeniul pieţei de capital.

În cele ce urmează, vom descrie cum anume am folosit integrala Choquet în domeniul pieţei de capital. Mai exact, vom descrie un model matematic de decizie folosit pentru a selecta cei mai probabili viitori clienţi investitori (investitori virtuali) ai unei anumite companii de brokeraj din cadrul pieţei de capital. Am lucrat în colaborare cu o companie numită Confident Invest. Aceasta este o companie de brokeraj din cadrul pieţei de capital din România.

Rezultatele prezentate au fost publicate în [12].

2.1 Introducere

Confident Invest încearcă să găsească răspunsurile la două întrebări prin interpretarea răspunsurilor la alte întrebări pe care compania le solicită, în mod legal. Mai exact, compania realizează profilurile de risc ale clienţilor prin aplicarea unui chestionar. Profilele de risc ale clientului se realizează prin furnizarea a 15 întrebări, fiecare cu 4 tipuri de răspunsuri, de la dezacordul total până la acordul absolut. Răspunsurile sunt reprezentate prin numere întregi de la 0 la 3. Astfel, 0 reprezintă dezacord total şi 3 reprezintă acord absolut. Ţinta noastră a fost să determinăm răspunsul la întrebarea cheie „Rareori mi fac griji pentru finanţe", pe baza răspunsurilor la chestionar.

Confident Invest ne-a oferit răspunsurile la întrebările pentru 60 de potenţiali investitori, precum şi valorile pragurilor prealocate pentru a putea calcula valorile ţintă. Pentru a calcula valorile, am creat un program C++.

2.2 Rezultate

2.2.1 Setări Generale

În continuare, (I, Σ) va fi un spaţiu măsurabil şi $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}_+$ va fi o măsură monotonă. Pentru orice $i \in I$, vom considera o mulţime nevidă X_i şi fie $X \overset{\text{def}}{=\!=} \prod_{i \in I} X_i$. De asemenea, pentru orice $i \in I$, fie funcţia $\nu_i; X_i \to \mathbb{R}_+$. Apoi, pentru orice $x = (x_i)_{i \in I}$, considerăm funcţia $f_x : I \to \mathbb{R}_+$, dată prin $f_x(i) = \nu_i(x_i)$.
Presupunerea noastră majoră va fi că, pentru orice $x \in X$, funcţia f_x este integrabilă Choquet respectând măsura μ.

Integrala Choquet $(C) \int f_x \mathrm{d}\mu$, calculată pentru toţi $x \in \prod_{i \in I} X_i$, va fi instrumentul nostru de extragere a datelor (de fuziune).

2.2.2 Prospectarea Investitorilor Virtuali

Considerăm $I = \{1, 2, ..., n\}, n \in \mathbb{N}$, ca fiind mulţimea indecşilor asignaţi întrebărilor la care posibilii investitori sunt rugaţi să răspundă. Caz numeric $n = 15$.
Spaţiul nostru măsurabil este (I, Σ), cu I descris mai sus şi cu $\Sigma = \mathcal{P}(I)$.
Acceptăm existenţa unei măsuri monotone $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}_+$. Cazul numeic pentru μ este dat în cele ce urmează.

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } E = \emptyset \\ 0.3 & \text{dacă } 0 < |E| \leq 4 \\ 0.5 & \text{dacă } 4 < |E| \leq 10 \\ 0.7 & \text{dacă } 10 < |E| \leq 14 \\ 1 & \text{dacă } |E| = 15 \end{cases} \tag{2.1}$$

Pentru orice $i \in I$, X_i va exista mulţimea finită a tuturor răspunsurilor posibile la întrebarea numărul i. Deci, orice posibil investitor x care va răspunde la setul de întrebări, va fi identificat astfel: $x \equiv (x_i)_{i \in I} = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Aici, pentru orice $i \in I$, x_i este răspunsul dat de x la întrebarea numărul i.

Caz numeric: pentru orice $i \in I$, avem $\nu_i(X_i) \subset \{0, 1, 2, 3\}$. Semnificaţia fiind $\nu_i(t) = 0$ pentru "total neadevărat", $\nu_i(t) = 1$ pentru "parţial adevărat", $\nu_i(t) = 2$, pentru "în general adevărat", $\nu_i(t) = 3$ pentru "total adevărat".

Procedură: Pentru orice posibil investitor $x \equiv (x_1, x_2, ..., x_n)$, formăm funcţia $f_x : I \to \mathbb{R}_+$ dată prin $f_x(i) = \nu_i(x_i)$. "Disponibilitatea" unui posibil investitor x pentru a deveni un investitor real este evaluată prin numărul

$$\nu(x) \stackrel{\text{def}}{=\!=} (C) \int f_x(i) \mathrm{d}\mu(i) = (C) \int \nu_i(x_i) \mathrm{d}\mu(i). \tag{2.2}$$

Decizia (previziunea) cu privire la posibilitatea ca x să devină un client investitor real se va lua cu ajutorul următoarelor praguri:

$$\begin{aligned} &\nu(x) \in [0, 0.5) && \to x \text{ este un investitor sigur} \\ &\nu(x) \in [0.5, 1) && \to x \text{ este un investitor potenţial} \\ &\nu(x) \in [1, 2) && \to x \text{ este un investitor neutru} \\ &\nu(x) \in [2, 3] && \to x \text{ este un investitor slab (aproape} \\ &&& \quad \text{niciodată, } x \text{ nu va investi).} \end{aligned} \tag{2.3}$$

2.2.3 Caz Numeric şi Concluzii

Testul (chestionarul):

1. Îmi păstrez toate e-mailurile.
2. Materia mea preferată la şcoală a fost matematica.
3. Prefer să fac ordine în garderobă decât să mă uit la televizor.
4. Prefer să lucrez singur decât să lucrez în echipă.
5. Mă consider independent.
6. În general, organizez evenimentul când sunt invitat cină sau la film.
7. Sunt deranjat de oamenii care nu muncesc din greu.
8. Nu las niciodată nimic neterminat.

9. În general, nu conduc foarte repede.
10. Nu-mi plac sporturile competitive.
11. Nu-mi place să mă uit la filme de groază.
12. Nu sunt dornic să văd oameni noi.
13. Nu sunt niciodată anxios când aştept liftul.
14. Nu port niciodată lucruri la modă.
15. Nu sunt acuzat niciodată că am un temperament coleric.

Răspunsurile clienţilor:

Table 2.1: Răspunsurile clienţilor

Nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	0	2	2	1	2	2	2	0	0	1	0	0	1
2	2	3	1	2	1	1	2	2	2	1	2	1	0	1	3
3	2	1	1	2	3	2	3	3	1	0	1	1	1	1	1
4	2	3	2	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	2	1
5	1	1	0	0	2	2	1	1	2	1	3	0	1	0	1
6	0	2	0	1	2	2	3	3	0	1	0	1	0	1	1
7	0	1	2	1	3	0	1	2	2	0	1	0	0	1	1
8	3	0	1	0	2	0	0	1	0	1	0	0	0	0	2
9	3	0	2	0	1	0	2	3	2	0	1	0	2	1	1
10	1	0	2	2	2	0	2	3	3	3	3	2	1	1	0
11	0	1	0	1	2	0	1	1	1	0	1	2	1	1	1
12	0	0	2	1	3	0	1	2	3	0	0	0	1	0	2
13	0	0	2	0	1	0	2	0	1	2	0	0	0	0	0
14	2	1	0	0	2	1	2	1	0	0	1	1	0	1	3
15	1	0	1	1	2	1	0	3	1	1	1	0	1	0	1
16	2	2	3	0	2	2	2	2	1	1	2	0	2	0	2

Table 2.1: Răspunsurile clienţilor

Nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
17	2	0	1	2	2	1	1	2	0	0	3	1	0	0	1
18	0	0	0	0	0	3	3	3	0	3	3	3	0	0	1
19	1	0	2	0	3	0	2	3	0	0	3	0	0	1	2
20	0	2	1	2	3	2	3	2	1	0	0	0	0	0	0
21	2	1	1	3	2	1	3	3	0	1	1	0	1	0	0
22	1	0	3	3	3	2	2	3	0	0	3	0	0	0	2
23	0	3	0	0	3	2	2	2	3	0	3	0	0	0	1
24	1	3	1	1	2	1	1	0	2	0	3	1	1	1	1
25	1	1	0	2	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	1
26	3	3	0	1	2	0	1	3	3	3	3	0	1	0	2
27	1	3	1	3	3	0	1	1	1	3	3	1	2	0	1
28	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	3	0	1	0	3
29	3	0	3	0	3	0	3	3	2	0	2	1	1	0	1
30	0	3	1	1	3	1	3	3	3	0	0	3	1	1	1
31	0	0	1	0	3	2	2	2	2	3	1	1	2	0	3
32	0	0	2	2	1	2	1	1	2	0	0	1	2	0	0
33	1	3	2	0	0	1	2	3	1	0	1	1	3	3	2
34	1	1	3	3	3	2	1	2	3	1	3	3	3	3	1
35	2	2	1	0	1	1	2	2	1	1	2	0	1	2	0
36	0	0	2	0	3	1	1	2	1	0	0	0	1	0	0
37	0	1	2	0	3	0	3	2	0	0	0	0	1	0	0
38	2	2	2	2	2	1	2	2	1	1	3	1	1	1	1
39	3	0	0	0	3	0	1	3	1	0	2	1	1	0	2
40	3	0	2	0	1	0	1	3	1	0	2	0	2	0	2
41	1	0	0	0	3	2	2	3	1	0	0	0	1	0	0
42	1	3	0	2	2	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
43	1	0	0	0	0	2	1	1	3	1	1	0	1	2	2

Table 2.1: Răspunsurile clienţilor

Nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
44	2	0	2	1	2	0	1	2	1	0	3	0	2	1	1
45	2	0	0	0	1	2	2	2	3	2	3	0	2	2	0
46	1	3	0	1	2	2	2	3	1	0	3	0	2	0	1
47	1	1	3	0	2	1	2	2	0	0	0	1	1	0	0
48	0	2	1	0	1	2	0	2	0	3	3	0	0	0	3
49	1	1	0	2	2	1	1	0	1	0	3	2	1	0	2
50	0	0	0	0	1	3	3	2	0	0	0	0	0	0	0
51	2	1	0	1	3	1	1	0	0	2	2	1	2	1	3
52	2	1	2	1	2	0	0	2	1	1	3	1	2	0	2
53	2	2	1	3	1	1	1	2	2	2	3	1	2	2	1
54	0	3	1	0	1	0	2	1	0	1	0	0	0	0	0
55	1	0	0	1	3	1	1	2	2	1	2	0	1	0	2
56	0	3	3	0	2	0	1	3	1	0	3	0	0	0	2
57	1	1	2	1	3	0	1	3	1	0	3	0	1	0	2
58	0	0	0	0	1	1	1	0	2	1	3	2	0	0	1
59	2	2	1	1	1	3	2	1	3	1	3	0	1	1	0
60	2	2	2	0	0	1	2	3	2	1	0	0	1	0	1

Rezultate şi concluzii:

Table 2.2: Rezultate şi concluzii

Nr	Valoare	Tipul investitorului
1	0.8	investor potenţial
2	1.5	investor neutru
3	1.3	investor neutru
4	1.3	investor neutru
5	1.1	investor neutru

Table 2.2: Rezultate şi concluzii

Nr	Valoare	Tipul investitorului
6	1.1	investor neutru
7	1.1	investor neutru
8	1.3	investor neutru
9	1.3	investor neutru
10	1.3	investor neutru
11	1.2	investor neutru
12	1.3	investor neutru
13	0.6	investor potenţial
14	1.5	investor neutru
15	1.1	investor neutru
16	1.3	investor neutru
17	1.1	investor neutru
18	1.5	investor neutru
19	1.3	investor neutru
20	0.9	investor potenţial
21	1.1	investor neutru
22	1.3	investor neutru
23	1.1	investor neutru
24	1.3	investor neutru
25	1.2	investor neutru
26	1.3	investor neutru
27	1.3	investor neutru
28	1.5	investor neutru
29	1.1	investor neutru
30	1.7	investor neutru
31	1.5	investor neutru
32	1	investor neutru

Table 2.2: Rezultate şi concluzii

Nr	Valoare	Tipul investitorului
33	1.7	investor neutru
34	2	investor slab
35	1	investor neutru
36	1.1	investor neutru
37	1.1	investor neutru
38	1.6	investor neutru
39	1.3	investor neutru
40	1.3	investor neutru
41	1.1	investor neutru
42	1.1	investor neutru
43	1.3	investor neutru
44	1.3	investor neutru
45	1.3	investor neutru
46	1.3	investor neutru
47	1.1	investor neutru
48	1.5	investor neutru
49	1.3	investor neutru
50	0.9	investor potenţial
51	1.7	investor neutru
52	1.3	investor neutru
53	1.8	investor neutru
54	0.9	investor potenţial
55	1.3	investor neutru
56	1.3	investor neutru
57	1.3	investor neutru
58	1.3	investor neutru
59	1.1	investor neutru

Table 2.2: Rezultate şi concluzii

Nr	Valoare	Tipul investitorului
60	1.1	investor neutru

Chapter 3

Aplicaţii în psihologie ale integralei Choquet

În acest capitol, prezentăm câteva modele matematice bazate pe teoria fuzzy în domeniul psihologiei. Mai precis, descriem modul în care am folosit integrala Choquet pentru a determina nivelul de Deschidere şi nivelul de Anxietate pentru anumiţi subiecţi voluntari utilizaţi în cercetarea noastră.

Am lucrat în colaborare cu psihologii Institutului de Studii, Cercetare, Dezvoltare şi Inovare al Universităţii Titu Maiorescu din Bucureşti, precum şi cu specialişti ai Academiei Tehnice Militare din Bucureşti.

Specialiştii în psihologie cu care am colaborat au realizat diverse studii privind undele EEG, măsurători specifice psihologice, modelul BigFive, deschiderea, anxietatea(vezi [7], [15], [30], [31], [32], [49], [50], [51], [53], [54], [61]).

Specialiştii în psihologie afirmă că Deschiderea se caracterizează prin undele EEG Delta şi MidGamma (vezi[44]).

Studiile psihologilor arată că există o relaţie interactivă între Anxietate şi doi factori din teoria Big Five, şi anume extraversia şi nevroticismul. Mai exact, Anxietatea are o relaţie pozitivă cu nevroticismul şi o relaţie negativă cu extraversia (vezi[22], [44]).

Specialiştii în psihologie cu care am colaborat indică faptul că anxietatea se caracterizează prin undele LowAlpha, HighAlpha, LowBeta şi HighBeta.

Menţionăm că am plecat de la premisa că studiile, descoperirile şi datele furnizate de specialiştii în psihologie cu care am colaborat sunt certe, că modelele matematice descrise în acest capitol sunt fixe, ele putând fi uşor adaptate noilor descoperiri ale psihologilor în domeniile studiate de noi.

Rezultatele prezentate aici au fost publicate în [14],[23], [24], [25], [26].

3.1 Deschiderea

În acest subcapitol descriem două metode prin care se determină nivelul de Deschidere al unor subiecţi:

a) determinarea unei măsuri şi utilizarea ei pentru a afla nivelul de Deschidere al subiecţilor;

b) folosind mai multe măsuri cunoscute pentru a afla nivelul de Deschidere al subiecţilor.

Ca tehnică matematică, integralele neliniare sunt utilizate ca a instrument de fuziune.

3.1.1 Determinarea unei măsuri şi utilizarea ei pentru a afla nivelul de Deschidere al subiecţilor

3.2.1.1 Un model matematic care caracterizează nivelul de Deschidere

Aici descriem o procedură de calculare a unei măsuri (un instrument de agregare), prin utilizarea datelor rezultate din măsurători şi concluziile asupra subiecţilor în ceea ce priveşte deschiderea.

Domonstraţia detaliată a acestei proceduri poate fi găsită în subsecţiunea 3.3.2.

Rezultatele prezentate aici au fost publicate în [24].

STABILIREA PROBLEMEI

Considerăm X={x_1, x_2, ...,x_n} o mulţime de surse de informaţii, numite atribute.

Informaţiile numerice preluate din toate atributele pot fi privite ca o funcţie $f : X->(-\infty,\infty)$ numită observator sau înregistrare a atributelor care vor fi scrise $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$.

Dacă facem l observaţii, anume $f_1, \ldots, f_l$ cu $f_i : T->\mathbb{R}$, vom avea tabelul complet de date:

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2)\cdots & f_1(x_n) & y_1 \\ f_2(x_1) & f_2(x_2)\cdots & f_2(x_n) & y_2 \\ \vdots & \vdots\cdots & \vdots & \vdots \\ f_l(x_1) & f_l(x_2)\cdots & f_l(x_n) & y_l \end{pmatrix}$$

unde orice $y_i \in \mathbb{R}$, i= 1, 2, ... l este informaţia cuprinsă.

Anume, pentru datele de intrare $f_i(x_1)$, ..., $f_i(x_n)$ vom obţine o ieşire şi anume y_i. Numim l dimensiunea bazei de date.

Lucrăm în cazul particular în care instrumentul de fuziune este integrala Choquet.

Mai exact, pentru orice i = 1, 2, ... l avem

$y_i = (C) \int f_i dy$

unde y este o măsură monotonă y : $\mathcal{P}(T) -> R_+$.

În cazul nostru, avem două variabile, anume undele Delta şi MidGamma (n=2).

În plus, avem l măsurători, mai exact mediile măsurătorilor efectuate pe 80 de subiecţi (l=80).

Cunoaştem valorile de intrare $f_i(x_j)$, i = 1, 2, ... l; j = 1, 2, ... n şi valorile de ieşire y_i : i = 1, 2, ... l.

Prin anumite mijloace, încercăm să determinăm măsura y, anume încercăm să determinăm valorile lui y(E),

$E \in \mathcal{P}^*(T)$ unde $\mathcal{P}^*(T) = \{E \subset T | E \neq \emptyset\}$. Este evident că $\mathcal{P}^*(T)$ are 2^n -1 elemente.

În cazul nostru, valorile de ieşire sunt reprezentate de clasificările date de psihologi referitoare la fiecare subiect.

Acestea sunt reprezentate prin grade de la 0 la 6.

Orice număr $j \in \{1, 2, \cdots, 2^n - 1\}$ se poate scrie într-o unică reprezentare binară j= $\overline{j_n \ \ j_{n-1} \ldots j_1}$ $\left(\stackrel{def}{=}\right)$ $j_1 + 2j_2 + 2^2 j_3 + ... + 2^{n-1} j_n = 2^{n-1} j_n + 2^{n-2} j_{n-1} + ... + 2j_2 + j_1$ (cel puţin un $j_i \neq 0$, $j_i \in \{0, 1\}$).

Deci, cele $t = 2^n - 1$ mulţimi $E \in \mathcal{P}^*(T)$ vor fi numerotate astfel:

E_1 , E_2 , ... $E_{2^n - 1}$.

Astfel, dacă avem E_j , cu j = $\overline{j_n \ \ j_{n-1} \ldots j_1}$, regula de apartenenţă este $x_i \in E_j$ dacă şi numai dacă $j_i = 1$.

Fie formula alternativă:

(C)$\int f dy = \sum_{j=0}^{2^n-1} b_j y(E_j)$ (1)

unde pentru orice j=1,2,... n,

$$b_j = \begin{cases} \min\limits_{x_i \in E_j} f(x_i) - \max\limits_{x_i \in T \setminus E_j} f(x_i), \ daca \ \min\limits_{x_i \in E_j} f(x_i) - \max\limits_{x_i \in T \setminus E_j} f(x_i) \geq 0 \\ 0 \ , \ daca \ \min\limits_{x_i \in E_j} f(x_i) - \max\limits_{x_i \in T \setminus E_j} f(x_i) < 0 \end{cases}$$

cu convenţia $\max_{x \in \varnothing} f(x) = 0$ (pentru $E_{2^n - 1}$=T).

Prin urmare, putem considera un sistem de l ecuaţii cu t necunoscute (în cazul nostru t=$2^n - 1$, elementele necunoscute fiind y(Ej), j=1,2,... $2^n - 1$) :

$$\sum_{j=1}^{t} b_{p_j} \ y(Ej) = y_p$$

Acest sistem apare deoarece pentru p=1,2,. . . .t, avem y_p=(c)$\int f_p \ dy = \sum_{j=1}^{t} b_{p_j} \ y(Ej)$ (2). Mai precis, b_{p_j} este b_j din (1) pentru f_p în loc de f.

Rezolvând problema (aproximativ) de la (2) rezultă:

$$X = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\dots & b_{1t} \\ b_{21} & b_{22}\dots & b_{2t} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{l1} & b_{l2}\dots & b_{lt} \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_l \end{pmatrix}$$

Luăm în considerare soluţia (avem o soluţie aproximativă)

$$\text{A}= \begin{pmatrix} t_1^0 \\ t_2^0 \\ \vdots \\ t_t^0 \end{pmatrix}$$

Atunci $\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{XA} = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\ \mathrm{Y}$ (3)

Lucrăm pentru l>=m şi considerăm că $\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}$ este non-singulară, putem deduce din (3)

A= $(\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{X})^{-1}\ \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y}$ (4)

Rezultatul returnat (care reprezintă măsura) de către programul C++:

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, \quad E = \varnothing \\ 0.00000250551, \quad E = \{x_1\} \\ 0, \quad E = \{\ x_2\} \\ 0.00000564078, \quad E = \{x_1,\ x_2\} \end{cases}$$

Am verificat dacă măsurara calculată este monotonă. În acest caz vorbim despre una monotonă.

3.2.1.2 Utilizarea unei măsuri generalizate pentru a determina nivelul de Deschidere

Descriem aici o procedură de calculare a nivelului de deschidere pentru anumiţi subiecţi, folosind o măsură obţinută prin procedura descrisă în 3.2.1.1. Aceste niveluri de deschidere calculate au fost comparate cu clasificările obţinute de psihologi prin teste standard.

Rezultatele prezentate aici au fost publicate în [26].

INTRODUCERE

Am folosit procedura descrisă în Subsect. 3.2.1.1, cu valorile undelor EEG pentru 80 de subiecţi şi am calculat următoarea măsură:

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, \quad E = \varnothing \\ 0.0000143333, \quad E = \{x_1\} \\ 0.0000406178, \quad E = \{\ x_2\} \\ 0.0000471675, \quad E = \{x_1,\ x_2\} \end{cases}$$

Valorile de ieşire sunt reprezentate de clasificări date de psihologi pentru subiecţi. Acestea sunt reprezentate prin note de la 0 la 100.

DESCRIEREA REZULTATELOR

Am folosit măsura obţinută μ pentru a decide nivelul de deschidere pentru 10 noi subiecţi.

Folosind formula $y_{\mathrm{p}} = (C) \int f_p d\mu$, obţinem rezultatele:

Table 3.1: Rezultate

Nr	Valorile Calculate	Rezultatele psihologilor
1	16.8855	20
2	0.0000406178	0
3	3.93688	5
4	21.251	20
5	11.8435	10
6	1.36402	2
7	13.82312	20
8	18.3126	20
9	16.3625	20
10	39.0766	40

3.1.2 Utilizarea mai multor măsuri cunoscute pentru a afla nivelul de Deschidere al subiecţilor

3.2.2.1 O metodă de diagnosticare a Deschiderii folosind integralele nonliniare

Descriem un model matematic prin care se procesează nivelul undelor de tip EEG, pentru a caracteriza nivelul de deschidere. Ideea noastră a fost să folosim integrala Choquet care respectă o măsură monotonă. Luăm în considerare datele rezultate din măsurătorile undelor EEG pentru un grup de subiecţi. Descriem o procedură prin care utilizând diferite măsuri monotone (obţinute prin procedura descrisă la 3.2.1.1.) calculăm nivelul de deschidere al unui subiect folosind integrala Choquet. Pentru fiecare pacient avem nivelul de deschidere dat de psihologi. Comparăm rezultatele obţinute prin aceasta metodă cu rezultatele psihologilor. Dintre toate măsurile utilizate, alegem măsura care oferă cele mai apropiate rezultate de cele reale.

Rezultatele prezentate aici au fost publicate în [23].

DETERMINAREA GRADULUI DE DESCHIDERE

Am făcut l=14 măsurători. Acestea sunt cele l =14 funcţii $f_1, f_2, \ldots f_{14}$. Cele n=2 atribute măsurate sunt $x_1 = Delta,\ x_2 = MidGamma$.

Anume, pentru fiecare dintre cele 14 măsurători (linii), am obţinut valorile de intrare $f_p\left(x_1\right), f_p\left(x_2\right)$ şi valorile de ieşire $y_p,\ p = 1, 2, \ldots, 14$.

Valorile de intrare sunt mediile măsurătorilor efectuate pe 14 subiecţi. Valorile de ieşire sunt obţinute folosind clasificarea dată de către psihologi subiecţilor (măsuraţi individual). Aceste valorile de ieşire sunt reprezentate prin note, de la 0 la 100.

Am considerat $t = 8$ măsuri monotone. Utilizând fiecare măsură μ_k $(k = \overline{1, t})$, pentru fiecare subiect p, am calculat nivelul de deschidere $z_{k,p}$ ($k = 1, \ldots, t$ and $p = 1, \ldots, 14$).Pentru oricare $k = \overline{1, t}$ *si pentru oricare* $p = \overline{1,\ 14}$ avem:

$$z_{k,p} = (C) \int f_p d\mu_k$$

Pentru fiecare măsură μ_k, am comparat prin Metoda celor mai mici pătrate, rezultatele obţinute prin metoda noastră cu rezultatele obţinute de catre psihologi. De fapt, pentru fiecare măsură μ_k, am calculat $E_k = \sum_{p=1}^{14} \left(z_{k,p} - y_p\right)^2$.

Am considerat măsurile:

$$\mu_1(E) = \begin{cases} 0, \quad E = \varnothing \\ 0.0000143333, \quad E = \{x_1\} \\ 0.0000406178, \quad E = \{\ x_2\} \\ 0.0000471675, \quad E = \{x_1,\ x_2\} \end{cases},$$

$$\mu_2(E) = \begin{cases} 0, \quad E = \varnothing \\ 0.0000245333, \quad E = \{x_1\} \\ 0.0000507178, \quad E = \{\ x_2\} \\ 0.00671685, \quad E = \{x_1,\ x_2\} \end{cases},$$

$$\mu_3(E) = \begin{cases} 0, \quad E = \varnothing \\ 0.000014, \quad E = \{x_1\} \\ 0.00004, \quad E = \{\ x_2\} \\ 0.000047, \quad E = \{x_1,\ x_2\} \end{cases},$$

$$\mu_4(E) = \begin{cases} 0, \quad E = \varnothing \\ 0.001, \quad E = \{x_1\} \\ 0.00004, \quad E = \{\ x_2\} \\ 0.002, \quad E = \{x_1,\ x_2\} \end{cases},$$

$$\mu_5(E) = \begin{cases} 0, \quad E = \varnothing \\ 0.03, \quad E = \{x_1\} \\ 0.1, \quad E = \{\ x_2\} \\ 0.2, \quad E = \{x_1,\ x_2\} \end{cases},$$

$$\mu_6(E) = \begin{cases} 0, \quad E = \varnothing \\ 0.21, \quad E = \{x_1\} \\ 0.22, \quad E = \{\ x_2\} \\ 0.3, \quad E = \{x_1,\ x_2\} \end{cases},$$

$$\mu_7(E) = \begin{cases} 0, \quad E = \varnothing \\ 0.00000249806, \quad E = \{x_1\} \\ 0, \quad E = \{x_2\} \\ 0.00000558338, \quad E = \{x_1, x_2\} \end{cases}$$

$$\mu_8(E)=\begin{cases}0, & E=\varnothing\\ 0.0123, & E=\{x_1\}\\ 0.6178, & E=\{\ x_2\}\\ 0.7675, & E=\{x_1,\ x_2\}\end{cases}.$$

Pentru *k=1*, am obţinut $E_1=\sum_{p=1}^{14}\left(z_{1,p}-y_p\right)^2=1704.34$.

Pentru *k=2*, am obţinut $E_2=\sum_{p=1}^{14}\left(z_{2,p}-y_p\right)^2=106.418$.

Pentru *k=3*, am obţinut $E_3=\sum_{p=1}^{14}\left(z_{3,p}-y_p\right)^2=1761.04$.

Pentru *k=4*, am obţinut $E_4=\sum_{p=1}^{14}\left(z_{4,p}-y_p\right)^2=1.36172\cdot 10^7$.

Pentru *k=5*, am obţinut $E_5=\sum_{p=1}^{14}\left(z_{5,p}-y_p\right)^2=7.82091\cdot 10^{10}$.

Pentru *k=6*, am obţinut $E_6=\sum_{p=1}^{14}\left(z_{6,p}-y_p\right)^2=4.44816\cdot 10^{11}$.

Pentru *k=7*, am obţinut $E_7=\sum_{p=1}^{14}\left(z_{7,p}-y_p\right)^2=11257.1$.

Pentru *k=8*, am obţinut $E_8=\sum_{p=1}^{14}\left(z_{8,p}-y_p\right)^2=9.06956\cdot 10^{11}$.

Am ales măsura care oferă cel mai apropiat rezultat de cel real. De fapt, am ales minimul valorilor lui E_k. Acesta este E_2.

Deci, μ_2 este o măsură monotonă care oferă cel mai apropiat rezultat raportat la rezultatele psihologilor legate de deschidere. Acesta este un motiv bun pentru a alege μ_2 ca măsură „bună" pentru viitoarele măsurători.

3.2 Anxietatea

În acest subcapitol descriem două metode prin care se determină nivelul de Anxietate al unor subiecţi:

a) folosind mai multe măsuri monotone cunoscute pentru a afla nivelul de Anxietate al subiecţilor;

b) determinarea unei măsuri şi utilizarea ei pentru a afla nivelul de Anxietate al subiecţilor.

Ca tehnică matematică, integralele nonliniare sunt utilizate ca a instrument de fuziune. Terminologia folosită în această secţiune poate fi găsită în [14] şi [25].

3.2.1 Folosind mai multe măsuri monotone cunoscute pentru a afla nivelul de Anxietate al subiecţilor

3.3.1.1 CĂTRE O METODĂ DE DIAGNOSTICARE A ANXIETĂŢII FOLOSIND INTEGRALA CHOQUET

În această subsecţiune, descriem un model matematic prin care nivelul undelor de tip EEG este procesat pentru a caracteriza nivelul de anxietate. Ideea noastră a fost să folosim integrala Choquet care respectă o măsură monotonă. Am luat în considerare datele rezultate din măsurătorile undelor EEG pentru un grup de subiecţi. Am descris o procedură prin care utilizăm diferite măsuri monotone pentru a calcula nivelul de anxietate al unui subiect folosind integrala Choquet. Pentru fiecare pacient avem nivelul de anxietate dat de psihologi. Pentru fiecare pacient comparăm rezultatele obţinute prin această metodă cu rezultatele psihologilor. Dintre toate măsurile folosite, am ales măsura care a oferit cele mai apropiate rezultate faţă de cele reale.

Rezultatele prezentate aici au fost publicate în [25].

DETERMINAREA GRADULUI DE ANXIETATE

Am realizat l=14 măsurători. Acestea sunt cele l=14 funcţii $f_1, f_2, \dots f_{14}$. Cele n=4 atribute măsurate sunt $x_1 = LowAlpha$, $x_2 = HighAlpha$, $x_3 = LowBeta$, $x_4 = HighBeta$. De fapt, pentru oricare dintre cele 14 măsurători (linii), am obţinut valorile de intrare $f_p(x_1), f_p(x_2), f_p(x_3), f_p(x_4)$ şi valorile de ieşire y_p, $p = 1, 2, \dots, 14$. Valorile de intrare sunt mediile măsurătorilor efectuate pe 14 subiecţi. Valorile de ieşire sunt obţinute folosind clasificarea dată de către psihologi subiecţilor (individual măsuraţi).Aceste valorile de ieşire sunt reprezentate prin note, de la 0 la 100.

Am considerat $t = 8$ funcţii monotone. Utilizând fiecare măsură μ_k $(k = \overline{1, t})$, pentru fiecare subiect p, am calculat nivelul de anxietate $z_{k,p}$ ($k = 1, \dots, t$ şi $p = 1, \dots, 14$).Pentru fiecare $k = \overline{1, t}$ $\;si\ pentru\ fiecare\ p = \overline{1,\ 14}$ avem: $z_{k,p} = (C) \int f_p d\mu_k$ Pentru fiecare măsură μ_k, am comparat rezultatele obţinute prin metoda noastră cu rezultatele psihologilor, folosind Metoda celormai mici pătrate. Mai exact, pentru fiecare măsură μ_k, am calculat $E_k = \sum_{p=1}^{14} (z_{k,p} - y_p)^2$.

Am considerat măsurile:

$$\mu_1(E)=\begin{cases} 0, \quad E=\varnothing \\ 0.0000143333, \quad E=\{x_1\} \\ 0.0000406178, \quad E=\{\ x_2\} \\ 0.0000471675, \quad E=\{x_1,\ x_2\} \\ 0.00000472641, \quad E=\{x_3\} \\ 0.0000143333, \quad E=\{x_1,x_3\} \\ 0.0000406178, \quad E=\{x_2,x_3\} \\ 0.0000955576, \quad E=\{x_1,\ x_2,x_3\} \\ 0.0000254858, \quad E=\{x_4\} \\ 0.0000320333, \quad E=\{x_1,x_4\} \\ 0.0000406178, \quad E=\{x_2,x_4\} \\ 0.0000471675, \quad E=\{x_1,x_2,x_4\} \\ 0.000225524, \quad E=\{x_3,x_4\} \\ 0.000225524, \quad E=\{x_1,x_3,x_4\} \\ 0.000616894, \quad E=\{x_2,x_3,x_4\} \\ 0.000616894, \quad E=\{x_1,x_2,x_3,x_4\} \end{cases}, \mu_2(E)=\begin{cases} 0, \quad E=\varnothing \\ 0.0000245333, \quad E=\{x_1\} \\ 0.0000507178, \quad E=\{\ x_2\} \\ 0.00671685, \quad E=\{x_1,\ x_2\} \\ 0.00000972621, \quad E=\{x_3\} \\ 0.000246333, \quad E=\{x_1,x_3\} \\ 0.000606178, \quad E=\{x_2,x_3\} \\ 0.01955576, \quad E=\{x_1,\ x_2,x_3\} \\ 0.0000324858, \quad E=\{x_4\} \\ 0.000329333, \quad E=\{x_1,x_4\} \\ 0.00606178, \quad E=\{x_2,x_4\} \\ 0.051675, \quad E=\{x_1,x_2,x_4\} \\ 0.0625524, \quad E=\{x_3,x_4\} \\ 0.725524, \quad E=\{x_1,x_3,x_4\} \\ 0.816894, \quad E=\{x_2,x_3,x_4\} \\ 0.916894, \quad E=\{x_1,x_2,x_3,x_4\} \end{cases},$$

$$\mu_3(E)=\begin{cases} 0, \quad E=\varnothing \\ 0.000014, \quad E=\{x_1\} \\ 0.00004, \quad E=\{\ x_2\} \\ 0.000047, \quad E=\{x_1,\ x_2\} \\ 0.0000047, \quad E=\{x_3\} \\ 0.0000145, \quad E=\{x_1,x_3\} \\ 0.000048, \quad E=\{x_2,x_3\} \\ 0.000095, \quad E=\{x_1,\ x_2,x_3\} \\ 0.000025, \quad E=\{x_4\} \\ 0.000032, \quad E=\{x_1,x_4\} \\ 0.0000406, \quad E=\{x_2,x_4\} \\ 0.0000471, \quad E=\{x_1,x_2,x_4\} \\ 0.0002, \quad E=\{x_3,x_4\} \\ 0.00023, \quad E=\{x_1,x_3,x_4\} \\ 0.000616, \quad E=\{x_2,x_3,x_4\} \\ 0.0006168, \quad E=\{x_1,x_2,x_3,x_4\} \end{cases}, \mu_4(E)=\begin{cases} 0, \quad E=\varnothing \\ 0.001, \quad E=\{x_1\} \\ 0.00004, \quad E=\{\ x_2\} \\ 0.002, \quad E=\{x_1,\ x_2\} \\ 0.0003, \quad E=\{x_3\} \\ 0.003, \quad E=\{x_1,x_3\} \\ 0.0005, \quad E=\{x_2,x_3\} \\ 0.006, \quad E=\{x_1,\ x_2,x_3\} \\ 0.00002, \quad E=\{x_4\} \\ 0.004, \quad E=\{x_1,x_4\} \\ 0.006, \quad E=\{x_2,x_4\} \\ 0.01, \quad E=\{x_1,x_2,x_4\} \\ 0.02, \quad E=\{x_3,x_4\} \\ 0.03, \quad E=\{x_1,x_3,x_4\} \\ 0.04, \quad E=\{x_2,x_3,x_4\} \\ 0.05, \quad E=\{x_1,x_2,x_3,x_4\} \end{cases},$$

$$\mu_5(E) = \begin{cases} 0, \quad E = \varnothing \\ 0.03, \quad E = \{x_1\} \\ 0.1, \quad E = \{\ x_2\} \\ 0.2, \quad E = \{x_1,\ x_2\} \\ 0.02, \quad\ \ E = \{x_3\} \\ 0.04, \quad E = \{x_1, x_3\} \\ 0.3, \quad E = \{x_2, x_3\} \\ 0.4, \quad E = \{x_1,\ x_2, x_3\} \\ 0.008, \quad E = \{x_4\} \\ 0.07, \quad E = \{x_1, x_4\} \\ 0.5, \quad E = \{x_2, x_4\} \\ 0.6, \quad E = \{x_1, x_2, x_4\} \\ 0.7, \quad E = \{x_3, x_4\} \\ 0.8, \quad E = \{x_1, x_3, x_4\} \\ 0.9, \quad E = \{x_2, x_3, x_4\} \\ 0.95, \quad E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \end{cases}, \ \mu_6(E) = \begin{cases} 0, \quad E = \varnothing \\ 0.21, \quad E = \{x_1\} \\ 0.22, \quad E = \{\ x_2\} \\ 0.3, \quad E = \{x_1,\ x_2\} \\ 0.009, \quad\ \ E = \{x_3\} \\ 0.35, \quad E = \{x_1, x_3\} \\ 0.429, \quad E = \{x_2, x_3\} \\ 0.54, \quad E = \{x_1,\ x_2, x_3\} \\ 0.01, \quad E = \{x_4\} \\ 0.25, \quad E = \{x_1, x_4\} \\ 0.26, \quad E = \{x_2, x_4\} \\ 0.47, \quad E = \{x_1, x_2, x_4\} \\ 0.1, \quad E = \{x_3, x_4\} \\ 0.6, \quad E = \{x_1, x_3, x_4\} \\ 0.7, \quad E = \{x_2, x_3, x_4\} \\ 0.8, \quad E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \end{cases},$$

$$\mu_7(E)=\begin{cases} 0, & E=\varnothing \\ 0.91, & E=\{x_1\} \\ 0.8, & E=\{\ x_2\} \\ 0.92, & E=\{x_1,\ x_2\} \\ 0.94, & E=\{x_3\} \\ 0.95, & E=\{x_1,x_3\} \\ 0.96, & E=\{x_2,x_3\} \\ 0.97, & E=\{x_1,\ x_2,x_3\} \\ 0.98, & E=\{x_4\} \\ 0.99, & E=\{x_1,x_4\} \\ 0.995, & E=\{x_2,x_4\} \\ 0.997, & E=\{x_1,x_2,x_4\} \\ 0.998, & E=\{x_3,x_4\} \\ 0.9984, & E=\{x_1,x_3,x_4\} \\ 0.9989, & E=\{x_2,x_3,x_4\} \\ 0.99993, & E=\{x_1,x_2,x_3,x_4\} \end{cases},\ \mu_8(E)=\begin{cases} 0, & E=\varnothing \\ 0.0123, & E=\{x_1\} \\ 0.6178, & E=\{\ x_2\} \\ 0.7675, & E=\{x_1,\ x_2\} \\ 0.0004, & E=\{x_3\} \\ 0.02, & E=\{x_1,x_3\} \\ 0.62, & E=\{x_2,x_3\} \\ 0.79, & E=\{x_1,\ x_2,x_3\} \\ 0.00002, & E=\{x_4\} \\ 0.1, & E=\{x_1,x_4\} \\ 0.65, & E=\{x_2,x_4\} \\ 0.83, & E=\{x_1,x_2,x_4\} \\ 0.85, & E=\{x_3,x_4\} \\ 0.879, & E=\{x_1,x_3,x_4\} \\ 0.895, & E=\{x_2,x_3,x_4\} \\ 0.9, & E=\{x_1,x_2,x_3,x_4\} \end{cases}.$$

Pentru *k=1*, am obţinut $E_1=\sum_{p=1}^{14}(z_{1,p}-y_p)^2=1.07048$.

Pentru *k=2*, am obţinut $E_2=\sum_{p=1}^{14}(z_{2,p}-y_p)^2=1.01876\cdot 10^{10}$

Pentru *k=3*, am obţinut $E_3=\sum_{p=1}^{14}(z_{3,p}-y_p)^2=1.02563$.

Pentru *k=4*, am obţinut $E_4=\sum_{p=1}^{14}(z_{4,p}-y_p)^2=3.47604\cdot 10^{7}$.

Pentru *k=5*, am obţinut $E_5=\sum_{p=1}^{14}(z_{5,p}-y_p)^2=3.14793\cdot 10^{10}$.

Pentru *k=6*, am obţinut $E_6=\sum_{p=1}^{14}(z_{6,p}-y_p)^2=2.47029\cdot 10^{10}$.

Pentru *k=7*, am obţinut $E_7=\sum_{p=1}^{14}(z_{7,p}-y_p)^2=1.74603\cdot 10^{11}$.

Pentru *k=8*, am obţinut $E_8=\sum_{p=1}^{14}(z_{8,p}-y_p)^2=8.42105\cdot 10^{10}$.

Am ales acea măsură care a furnizat cele mai apropiate rezultate de cele reale. Mai exact, am ales minimul valorilor lui E_k. Aceasta este E_3.

3.2.2 Determinarea unei măsuri şi utilizarea ei pentru a afla nivelul de Anxietate al subiecţilor

3.3.2.1 Folosind integrala Choquet pentru determinarea gradului de Anxietate

În această subsecţiune, introducem un model matematic care descrie modul în care sunt procesate undele de tip EEG pentru a caracteriza nivelul de anxietate. Ideea noastră principală este să folosim integrala Choquet care respectă o măsură monotonă adecvată pentru a caracteriza nivelul de anxietate. Această măsură a fost obţinută folosind măsurătorile valorilor undelor EEG efectuate pe 70 de subiecţi şi nivelurile corespunzătoare de anxietate (stabilite de psihologi) acestor subiecţi. Pentru a ne verifica modelul matematic (instrumentul de agregare) l-am folosit pentru a determina nivelul de anxietate al altor 10 subiecţi, comparând rezultatele noastre cu rezultatele oferite de psihologi (comparaţia ne-a validat rezultatele).

Rezultatele prezentate aici au fost publicate în [14].

UTILIZAREA INTEGRALEI CHOQUET PENTRU A REZOLVA PROBLEMA INVERSĂ A FUNZIUNII INFORMAŢIILOR

Formula de Liniarizare pentru Calculul Integralei Choquet Discret Finit

Ne vom ocupa de cazul în care T este finită.

Pentru orice $E \in P^*(T)$, definim

$$a_E \stackrel{\text{def}}{=} \min_{\mathrm{x_p \in E}} f(x_p) - \max_{\mathrm{x_q \in T \setminus E}} f(x_q)$$

cu convenţia $\max\limits_{\mathrm{x_q \in \emptyset}} f(x_q) = 0$ (în cazul $E = T$).

Apoi, definim

$$b_E = \begin{cases} a_E, & a_E \geq 0, \\ 0, & a_E < 0 \end{cases}$$

Se vede că $b_E = a_E^+$.

Teorema 3.1. *Avem formula*

$$(C)\int f d\mu = \sum_{E \in P^*(T)} b_E \mu(E) \tag{3.1}$$

Enumerarea canonică a lui $P^*(t)$

Orice număr $j = 1, 2, \cdots, 2^n - 1$ poate fi scris în mod unic în formă binară

$$j = \overline{j_n j_{n-1} \dots j_1} = j_1 + 2j_2 + 2^2 j_3 + \cdots + 2^{n-1} j_n$$

unde toţi $j_i \in \{0, 1\}$ şi cel puţin unul $j_i \neq 0$.

Regula de apartenenţă este următoarea:

$$x_i \in E_{\overline{j_n j_{n-1} \cdots j_1}} \Leftrightarrow j_i = 1$$

(a.î. $E_{\overline{j_n j_{n-1} \cdots j_1}} = \cup_{j_i=1}\{x_i\}$)

Această regulă de apartenenţă generează exact $2^n - 1$ mulţimi diferite.

Putem vedea că formula (3.1) din Theorem 3.1 poate fi scrisă în forma

$$(C)\int f d\mu = \sum_{j=0}^{2^n-1} b_{E_j} \mu(E_j) \tag{3.2}$$

unde orice $j = 1, 2, \cdots, 2^n - 1$ este scris în forma $\overline{j_n j_{n-1} \cdots j_1}$.

Rezolvarea Problemei iInverse a Fuziunii Informaţiilor în acest caz (Identificarea Măsurii Monotone Utilizate pentru a Genera Instrumentul de Agregare)

Vom lua în considerare elementele x_i ale unei mulţimi $T = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ ca sursă de informaţii, de exemplu, orice x_i este un subiect al observaţiei noastre. Orice observaţie a tuturor subiecţilor din T va fi considerată ca o funcţie $f : T \to \mathbb{R}$. Vom face l observaţii $f_1, f_2, \cdots f_l$, obţinând pentru orice astfel de observaţie $f_i : T \to \mathbb{R}$ valorile $f_i(x_j), j = 1, 2, \cdots, n$ şi concluzia (care este numerică) $y_i \in \mathbb{R}$. De fapt, valorile $f_i(x_j)$ şi valorile y_i sunt intrąrile în sistem (oricare y_i este o valoare a ţintei de fuziune).

Acceptăm existenţa unei măsuri monotone $\mu : P(T) \to \mathbb{R}_+$ astfel încât

$$y_p = (C)\int f_p d\mu, p = 1, 2, \cdots, l \tag{3.3}$$

Acţionând în spiritul problemei inverse a fuziunii de informaţii, putem considera că un obiect necunoscut este măsura μ.

Trebuie să rezolvăm sistemul liniar (l ecuaţii cu $2^n - 1$ necunoscute).

$$\sum_{j=1}^{2^n-1} b_{p_j} \mu(E_j) = y_p, p = 1, 2, \cdots, l \tag{3.4}$$

Avem, pentru orice $p = 1, 2, \cdots, l$ şi orice $j = 1, 2, \cdots, 2^n - 1$, $b_{p_j} = b^p_{E_j}$, a.î. $b_{p_j} = a^p_{E_j}$ dacă $a^p_{E_j} \geq 0$ şi $b_{p_j} = 0$ dacă $a^p_{E_j} < 0$, unde $a^p_{E_j} = \min\limits_{x_t \in E_j} f_p(x_t) - \max\limits_{x_t \notin E_j} f_p(x_t)$.

Considerăm matricile

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ & & \vdots & \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{lm} \end{pmatrix}, \text{de tipul } (l, m = 2^n - 1)$$

$$Y \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_l \end{pmatrix}, \text{de tipul } (l, 1)$$

şi matricea soluţie (aproximativă)

$$A = \begin{pmatrix} t^0_1 \\ t^0_2 \\ \vdots \\ t^0_m \end{pmatrix}, \text{de tipul } (m = 2^n - 1, 1)$$

$$X^T X A = X^T Y \tag{3.5}$$

În cazul (de dorit) particular când $X^T X$ este inversabilă, soluţia A este dată prin

$$A = (X^T X)^{-1} X^T Y \tag{3.6}$$

Corectarea rezultatelor:

Soluţia aproximativă ν trebuie să fie o măsură monotonă. Verificarea acestui fapt se face astfel: pentru orice $E \in P^*(T)$, $E \neq T$, trebuie să avem

$$0 \leq \nu(E) \leq \nu(E \cup \{x_i\}), \text{pentru oricare } x_i \in T - E$$

Dacă nu este cazul (adică apar valori negative ale lui $\nu(E)$, sau apar probleme de monotonie), modificăm ν astfel (este posibil ca unii dintre paşii următori să nu fie necesari):

1. Întâi, toate (posibilele) valori strict negative ale lui $\nu(E)$ să fie înlocuite cu 0.

2. Apoi, dacă există E, F în $P^*(T)$ astfel încât $E \subset F$ şi $\nu(E) > \nu(F)$, atunci modificăm $\nu(E)$, înlocuind valoarea $\nu(E)$ cu

$$max\{\nu(G)|G \subset E \text{ şi } \nu(G) \leq min\{\nu(H)|E \subset H\}\}$$

(mulţimea nu este vidă, conţinând $0 = \nu(\emptyset)$).

3. Procedura de la 2. continuă pentru acele $\nu(E)$ modificate, până când perechile "greşite" (E, F) de mai sus, nu mai apar deloc.

La final, obţinem măsura monotonă μ care va fi numită "măsura corectă".

DETERMINAREA GRADULUI DE ANXIETATE

Ideea principală

Crearea Instrumentului (Măsura). Problema inversă

Am realizat măsurători pentru $l = 70$ subiecţi. Am construit $l = 70$ funcţii $f_1, f_2, \cdots f_{70}$. Cele $n = 4$ atribute măsurate sunt $x_1 = LowAlpha, x_2 = HighAlpha, x_3 = LowBeta, x_4 = HighBeta$. Pentru fiecare dintre cele 70 măsurători (linii), am obţinut valorile de intrare: $f_p(x_1), f_p(x_2), f_p(x_3), f_p(x_4)$ şi valorile $y_p, p = 1, 2, \cdots, 70$. Valorile de intrare y_p sunt clasificările date de psihologi pentru subiecţi (măsuraţi individual), reprezentate prin note, de la 0 la 6 (însemnând că 0 este cel mai puţin anxios şi 6 este cel mai anxios).

Pentru oricare $p = 1, 2, \ldots, 70$ avem:

$$y_p = (C) \int f_p d\mu \tag{3.7}$$

Folosind cele descrise, am determinat "măsura" ν. A fost necesar ca ν să se modifice (uşor)(vezi Corectarea Rezultatelor) şi am obţinut măsura corectă μ, ale cărei valori $\mu(E)$, dispuse în ordinea lexicografică menţionată mai sus, sunt următoarele:

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } E = \emptyset \\ 0.0000208904, & \text{dacă } E = \{x_1\} \\ 0.0000104939, & \text{dacă } E = \{x_2\} \\ 0.000047098, & \text{dacă } E = \{x_1, x_2\} \\ 0.0000398943, & \text{dacă } E = \{x_3\} \\ 0.000230985, & \text{dacă } E = \{x_1, x_3\} \\ 0.000142402, & \text{dacă } E = \{x_2, x_3\} \\ 0.000230985, & \text{dacă } E = \{x_1, x_2, x_3\} \\ 0.0000143691, & \text{dacă } E = \{x_4\} \\ 0.0000357572, & \text{dacă } E = \{x_1, x_4\} \\ 0.0000143691, & \text{dacă } E = \{x_2, x_4\} \\ 0.000047098, & \text{dacă } E = \{x_1, x_2, x_4\} \\ 0.0000398943, & \text{dacă } E = \{x_3, x_4\} \\ 0.000230985, & \text{dacă } E = \{x_1, x_3, x_4\} \\ 0.000142402, & \text{dacă } E = \{x_2, x_3, x_4\} \\ 0.000230985, & \text{dacă } E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \end{cases}$$

Măsura a fost calculată utilizând un program C++.

Utilizarea Instrumentului (Măsura) Obţinut pentru a Determina Nivelul de Anxietate al altor Subiecţi. Problema Directă

Utilizâm măsura obţinută μ pentru a decid enivelul de anxietate pentru 10 noi subiecţi. Facem $l = 10$ măsurători. Valorile măsurătorilor sunt furnizate in fişiere CSV. Pentru fiecare subiect p, $p = 1, 2, \cdots, 10$, obţinem valorile $f_p(x_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ ca în cele descrise anterior. În acest caz, datele de intrare sunt $f_p(x_i)$ şi măsura μ. De asemenea, mai avem şi concluziile psihologilor pentru aceşti noi subiecţi care vor fi comparate cu rezultatele noastre. Mai exact, măsurând cei $l = 10$ noi subiecţi, am obţinut valorile $f_p(x_1)$,$f_p(x_2)$,$f_p(x_3)$,$f_p(x_4)$,$p = 1, 2, \cdots, 10$. Vezi Tabelul 3.2

Table 3.2: Noi subiecţi

No	**Low Alpha**	**High Alpha**	**Low Beta**	**High Beta**
1.	33738.85	26911.79	15911.23	15827.22

Table 3.2: Noi subiecţi

No	Low Alpha	High Alpha	Low Beta	High Beta
2.	11360.2	8108.433	9596.968	11737.35
3.	35170.35	23910.76	17211.32	12380.47
4.	36224.77	27315.48	16978.18	21143.96
5.	10658.68	7869.542	8243.346	7708.505
6.	33411.1	22809.05	21446.92	14769.47
7.	36568.82	23903.5	14545.97	19463.21
8.	33738.85	26911.79	15911.23	15827.22
9.	41482.67	27173.99	18173.78	19565.17
10.	51089.42	27487.33	19538.43	20055.94

Clasificările date de psihologi acestor subiecţi (măsuraţi individual), sunt reprezentate prin grade, de la 0 la 6 (cu semnificaţia că 0 este cel mai puţin anxios şi 6 cel mai anxios). Vezi Tabelul 3.3

Table 3.3: Grade

No	Grades
1.	4
2.	2
3.	5
4.	5
5.	2
6.	5
7.	4
8.	4
9.	5
10.	5

Folosind formula (3.7), am obţinut concluziile(datele de ieşire):

$$
\begin{aligned}
&y_1 = 4.33598 \approx 4,\\
&y_2 = 2.28522 \approx 2,\\
&y_3 = 4.52631 \approx 5,\\
&y_4 = 4.59469 \approx 5,\\
&y_5 = 1.95455 \approx 2,\\
&y_6 = 5.23955 \approx 5,\\
&y_7 = 4.06521 \approx 4,\\
&y_8 = 4.33598 \approx 4,\\
&y_9 = 4.92068 \approx 5,\\
&y_{10} = 5.38052 \approx 5.
\end{aligned}
$$

Chapter 4

Calculul aproximativ al integralei Sugeno

În acest capitol descriem o procedură pentru calculul aproximativ al integralei Sugeno.

Scopul nostru principal este de a furniza proceduri practice pentru calcularea aproximativă (cu precizie prealocată) a integralei Sugeno a unei funcţii măsurabile pozitive generale în raport cu o măsură generalizată monotonă. În acest scop, folosim metodele noastre în doi paşi (metoda simplă în doi paşi şi metoda topologică folosind teorema de convergenţă iterată).

Metodele menţionate mai sus reduc calculul general la calculul bine-cunoscut în cazul finit discret, care se poate face cu metode asistate de calculator.

Prezentul capitol se bazează pe [9].

Rezultatele prezentate aici au fost publicate în [10].

4.1 Rezultate generale

Definiţia 4.1. Definim pentru un spaţiu măsurabil monoton $(T, \mathcal{T}, \mu)$ şi pentru o funcţie $f \in M_+(\mathcal{T})$, **Condiţia (G)**: $\lim\limits_{\alpha \to \infty} \mu(F_\alpha(f)) = 0$.

Din nou, fie $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un spaţiu măsurabil monoton şi $f \in M_+(\mathcal{T})$ .Avem

Lema 4.1. *Avem echivalenţa*

a) $\left((S) \int f d\mu = \infty\right) \Leftrightarrow (\mu(F_\alpha) = \infty$ *pentru oricare* $0 < \alpha < \infty)$.

Prin urmare

b) $\left((S) \int f d\mu < \infty\right) \Leftrightarrow ($*Deci exista* $0 < \alpha < \infty$ *a. i.* $\mu(F_\alpha) < \infty)$.

Definiţia 4.2. Pentru oricare $i \in \mathbf{R}_+$, definim i – *trunchierea lui f*, care este funcţia $\underline{f}(i) : T \to \mathbf{R}_+$ dată prin $\underline{f}(i)(t) = f(t)$, în cazul $f(t) \leq i$ şi $\underline{f}(i)(t) = i$, în cazul

$f(t) > i$.

Teorema 4.1. (Teorema Reducerii)

1. Asumăm că $\mu(T) < \infty$. *Atunci*

$$(S)\int f d\mu = \sup_{\alpha\in(0,\mu(T)]} \alpha \wedge \mu(F_\alpha) \le \mu(T) < \infty.$$

2. Asumăm că f *este mărginită, şi anume că* $f(t) \le M$ *pentru oricare* $t \in T$, *unde* $M \in \mathbf{R}_+$. *Atunci*

$$(S)\int f d\mu = \sup_{\alpha\in(0,M]} \alpha \wedge \mu(F_\alpha) \le M < \infty.$$

3. Fie $i \in \mathbf{R}_+$ *şi* $\underline{f}(i)$ i *– trunchierea lui* f. *Atunci*

a) $(S)\int \underline{f}(i)\, d\mu = \sup\limits_{\alpha\in(0,i]} \alpha \wedge \mu(F_\alpha(f))$.

b) În cazul $\mu(T) \le i < \infty$, *avem*

$$(S)\int f d\mu = (S)\int \underline{f}(i)\, d\mu.$$

Teorema 4.2. (Calcul Sharp)

I. Asumăm că există $\alpha_0 \in \mathbf{R}_+$ *astfel încât* $\alpha_0 = \mu(F_{\alpha_0})$. *Atunci,*

1. $(\alpha > \alpha_0 \Rightarrow \mu(F_\alpha) < \alpha)$ *şi* $(\alpha < \alpha_0 \Rightarrow \mu(F_\alpha) > \alpha)$;

2. $\alpha_0 = (S)\int f d\mu$.

Spunem că avem un calcul sharp al $(S)\int f d\mu$, *utilizând o unică soluţie* α_0 *a ecuaţiei* $\alpha = \mu(F_\alpha)$.

II. Caz particular.

Asumăm că $(S)\int f d\mu < \infty$ *(a.î. există* $0 < \alpha < \infty$ *astfel încât* $\mu(F_\alpha) < \infty$, *vezi Lema 4.1). De asemenea, asumăm că funcţia* $u : [0,\infty) \to [0,\infty]$, *definită prin* $u(\alpha) = \mu(F_\alpha)$, *este continuă* $\left(a.i. \lim\limits_{\alpha\to t} u(\alpha) = u(t) \text{ pentru oricare } t \in [0,\infty)\right)$. *Atunci, există un unic* $\alpha_0 \in [0,\infty)$ *astfel încât* $u(\alpha_0) = \alpha_0$, *prin urmare* $\alpha_0 = (S)\int f d\mu$.

Teorema 4.3. *Asumăm că există* $\alpha_0 \ge 0$ *astfel încât* $\alpha_0 \ge \mu(F_{\alpha_0})$ *(am văzut că, în cazul Condiţiei (G) este îndeplinit faptul că* α_0 *există). Atunci, pentru orice* $\alpha \ge \alpha_0$ *avem*

$$(S)\int f d\mu = (S)\int \underline{f}(\alpha)\, d\mu$$

unde $\underline{f}(\alpha)$ *este* $\alpha-$*trunchierea lui* f.

Corolarul 4.1. *Asumăm că Condiţia (G) este îndeplinită. Atunci, pentru orice* $0 < \varepsilon < 1$, *există* $n \in \mathbf{N}$ *astfel încât*

$$(S)\int f d\mu = (S)\int \underline{f}(n)\, d\mu$$

unde $\underline{f}(n)$ *este* $n-$*trunchierea lui* f $\left(\textit{prinurmare } \lim_{n}(S)\int \underline{f}(n)\, d\mu = (S)\int f d\mu\right)$.

4.2 Funcţii Simple Pozitive, Funcţii Elementare Pozitive şi Integralele lor Sugeno

Teorema 4.4. *Pentru* $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_{A_i}$ *o funcţie simplă pozitivă avem (vezi de exemplu [28]:*

a) $(S)\int f d\mu = \max_{i=1}^{n} a_i \wedge \mu(F_{a_i}(f))$.

b) Dacă $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$, *avem* $F_{a_i}(f) = A_i \cup A_{i+1} \cup ... \cup A_n$ *pentru oricare* $i = 1, 2, ..., n$, *prin urmare*

$$(S)\int f d\mu = \max_{i=1}^{n} a_i \wedge \mu(A_i \cup A_{i+1} \cup ... \cup A_n).$$

Caz Particular (Cazul discret finit)

Putem aplica Teorema 4.4 pentru spaţiul particular monoton măsurabil $(T, \mathcal{T}, \mu)$, unde $T = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, cu x_i distincte, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(T)$ şi μ o măsurămonotonă arbitrară. Fie $f : T \to \mathbf{R}_+$ (prin urmare $f \in M_+(\mathcal{T})$) şi redenumim punctele distrincte $x_1, x_2, ..., x_n$ în forma $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ astfel încât $f(x_1^*) \leq f(x_2^*) \leq ... \leq f(x_n^*)$. Rezultă că $(S)\int f d\mu = \max_{i=1}^{n} f(x_i^*) \wedge \mu\left(\{x_i^*, x_{i+1}^*, ..., x_n^*\}\right)$.

Teorema 4.5. *Fie* $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_{A_i}$ *o funcţie pozitivă elementară cu* $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ....$ *Atunci*

$$(S)\int f d\mu = \sup_{i=1}^{\infty} a_i \wedge \mu(A_i \cup A_{i+1} \cup ... \cup A_n \cup ...).$$

Teorema 4.6. *Asumăm faptul că măsura* μ *este continuă inferior. Atunci*

$$(S)\int f d\mu = \lim_{n}(S)\int f_n d\mu = \sup_{n}(S)\int f_n d\mu,$$

unde $f_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_{A_i}$ *pentru orice* n.

Definiţia 4.3. Funcţia $\underline{f}(i)$ se numeşte i – *discretizarea lui f*.

4.3 Metode în Doi Paşi pentru Calcularea Integralelor Sugeno

Putem considera un spaţiu monoton măsurabil $(T, \mathcal{T}, \mu)$ şi o func ctie $f \in M_+(\mathcal{T})$ astfel încât *Condiţia (G) pentru f şi* μ *este îndeplinită*. Aşa cum am văzut, asta implică faptul că f este integrabilă Sugeno respectând μ. Fie

$$u \overset{def}{=} (S) \int f d\mu.$$

Scopul nostru este să calculăm u aproximativ cu o eroare prescrisă. La final, introducem câteva notaţii şi estimări unificate.

4.3.1 Notaţii şi Estimări Unificate

Strategia Trunchiere – Discretizare (STD)

Pentru $i \in \mathbf{N}$,

$$u(i) \overset{def}{=} (S) \int \underline{f}(i)\, d\mu$$

unde $\underline{f}(i) = i$ – trunchierea lui f. Pentru $n \in \mathrm{N}^*$,

$$u(i,n) \overset{def}{=} (S) \int f(i,n)\, d\mu$$

undee $f(i,n)$ este n – discretizarea lui $\underline{f}(i)$. Aşa cum am văzut în [9]:

$$f(i,n) = \sum_{m=0}^{i-1} \sum_{p=1}^{n} a(m,n,p) \cdot \varphi_{A(m,n,p)} + i \cdot \varphi_{f^{-1}([i,\infty))} \tag{4.1}$$

Explicitat, avem

$$f(i,n) = \left[0 \cdot \varphi_{f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{n}\right)\right)} + \frac{1}{n} \cdot \varphi_{f^{-1}\left(\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)\right)} + ... + \frac{n-1}{n} \cdot \varphi_{f^{-1}\left(\left[\frac{n-1}{n},1\right)\right)}\right] +$$

$$\left[1 \cdot \varphi_{f^{-1}\left(\left[1,1+\frac{1}{n}\right)\right)} + ... + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right) \cdot \varphi_{f^{-1}\left(\left[1+\frac{n-1}{n},2\right)\right)}\right] + ...+$$

$$+ \left[(i-1) \cdot \varphi_{f^{-1}\left(\left[i-1,i-1+\frac{1}{n}\right)\right)} + ... + \left(i - 1 + \frac{n-1}{n}\right) \cdot \varphi_{f^{-1}\left(\left[i-1+\frac{n-1}{n},i\right)\right)}\right] +$$

$$+i \cdot \varphi_{f^{-1}([i,\infty))} \overset{def}{=} \left[0 \cdot \varphi_{A_1} + \frac{1}{n} \cdot \varphi_{A_2} + ... + \frac{n-1}{n} \cdot \varphi_{A_n}\right] +$$

$$+\left[1 \cdot \varphi_{A_{n+1}} + \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \varphi_{A_{n+2}} + ... + \left(1+\frac{n-1}{n}\right) \cdot \varphi_{A_{2n}}\right] + ...+$$

$$+\left[(i-1) \cdot \varphi_{A_{(i-1)n+1}} + ... + \left(i-1+\frac{n-1}{n}\right) \cdot \varphi_{A_{in}}\right] + i \cdot \varphi_{A_{in+1}}.$$

Am scris $f(i,n)$ în ordine strict crescătoare a valorilor posibile ale acesteia. Observăm că:

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{in+1} = T, \quad A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_{in+1} = f^{-1}\left(\left[\frac{1}{n}, \infty\right)\right),$$

$$A_3 \cup A_4 \cup ... \cup A_{in+1} = f^{-1}\left(\left[\frac{2}{n}, \infty\right)\right), ...,$$

$$A_{in+1} = f^{-1}\left(\left[\frac{in}{n}, \infty\right)\right) = f^{-1}([i,\infty)).$$

Conform Teoremei 4.4, avem

$$u(i,n) = \max\left\{\frac{1}{n} \wedge \mu\left(f^{-1}\left(\left[\frac{1}{n}, \infty\right)\right)\right),\ \frac{2}{n} \wedge \mu\left(f^{-1}\left(\left[\frac{2}{n}, \infty\right)\right)\right), ...,\right.$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right) \wedge \mu\left(f^{-1}\left(\left[1-\frac{1}{n}, \infty\right)\right)\right),\ 1 \wedge \mu\left(f^{-1}([1,\infty))\right),$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right) \wedge \mu\left(f^{-1}\left(\left[1+\frac{1}{n}, \infty\right)\right)\right), ..., (i-1) \wedge \mu\left(f^{-1}([i-1,\infty))\right),$$

$$\left(i-1+\frac{1}{n}\right) \wedge \mu\left(f^{-1}\left(\left[i-1+\frac{1}{n}, \infty\right)\right)\right), ...,$$

$$\left.\left(i-1+\frac{n-1}{n}\right) \wedge \mu\left(f^{-1}\left(\left[i-1+\frac{n-1}{n}, \infty\right)\right)\right), i \wedge \mu\left(f^{-1}([i,\infty))\right)\right\}.$$

Prin urmare,

$$u(i,n) = \max_{p=1}^{in} \frac{p}{n} \wedge \mu\left(F_{\frac{p}{n}}(f)\right) \tag{4.2}$$

$\left(\text{aici, avem o diviziune de puncte } \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < ... < \frac{p}{n} < ... < \frac{in}{n} = i\right).$

Strategia Discretizare – Trunchiere (SDT)

Pentru $i \in \mathbf{N}^*$,

$$u(i) \overset{def}{=} (S) \int \underline{f}(i)) d\mu$$

unde $\underline{f}(i) = i$ – discretizarea lui f. Pentru $n \in \mathbf{N}$,

$$u(i,n) \overset{def}{=} (S) \int f(i,n)\, d\mu$$

unde $f(i,n)$ este n – trunchierea lui $\underline{f}(i)$. Cum am văzut în [9]:

$$f(i,n) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{p=1}^{i} a(m,i,p) \cdot \varphi_{A(m,i,p)} + n \cdot \varphi_{f^{-1}([n,\infty))}$$

(formula este valabilă pentru orice măsură monotonă). Procedând similar ca în cazul (STD) obţinem

$$u(i,n) = \max_{p=1}^{in} \frac{p}{i} \wedge \mu\left(F_{\frac{p}{i}}(f)\right) \tag{4.3}$$

$\big($aici, avem o diviziune de puncte $\frac{1}{i} < \frac{2}{i} < ... < \frac{p}{i} < ... < \frac{in}{i} = n\big)$.

Formula (4.3) poate fi obţinută din formula (4.2) interschimbând i şi n (în sens invers (4.3)$\rightarrow$(4.2) este de asemenea valid). Mai exact (observăm şi că $f(i,n)$ calculat pentru (SDT) este egal cu $f(n,i)$ calculat pentru (STD)):

$$u(i,n) \,\text{calculat pentru (SDT)} = u(n,i) \,\text{calculat pentru (STD)}.$$

Deci, este nevoie de un singur program de calcul.

Formula (4.2) şi (4.3) pot fi reţinute uşor, ambele având forma

$$u(i,n) = \max_{p=1}^{in} \alpha_p \wedge \mu\left(F_{\alpha_p}(f)\right).$$

Aici $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{in})$ este o pânză echidistantă cu densitate $\frac{1}{n}$ (în cazul (STD)) sau $\frac{1}{i}$ (în cazul (SDT)) şi mărime in. Densitatea se referă la procedura de discretizare şi mărimea ţine de procedura de trunchiere.

Pentru a simplifica calculul lui $u(i,n)$, este folositor să procedăm astfel:

a) Pentru orice a, b în $\mathbf{R}_+$ este indicat să se calculeze $a \vee b$ şi $a \wedge b$ folosind formulele $a \vee b = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$ şi $a \wedge b = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$.

b) Pentu $a_1, a_2, ..., a_n$ în $\mathbf{R}_+, n \geq 3$, pentru a calcula $\max_{i=1}^{n} a_i$, este indicat să se continue secvenţial (folosind şi punctul a)): $\max_{i=1}^{2} a_i = a_1 \vee a_2 \overset{def}{=} A_2$, $\max_{i=1}^{3} a_i = A_2 \vee a_3 \overset{def}{=} A_3$,..., $\max_{i=1}^{n} a_i = A_{n-1} \vee a_n \overset{def}{=} A_n$.

Estimări în cazul (STD)

a) Dacă $i_0 \geq \mu\left(F_{i_0}(f)\right)$, atunci $u = u(i)$ pentru orice $i \geq i_0$ (conform Teoremei 4.3).

b) $|u(i) - u(i,n)| = u(i) - u(i,n) \leq \frac{1}{n}$ pentru orice i (conform (4.1) şi Teoremei 1.8, Secţiunea 1.3). Avem $\lim_n u(i,n) = u(i)$ uniform care respectă i (conform Corolarului 1.3, Secţiunea 1.3).

Estimări în cazul (SDT)

a) $|u - u(i)| = u - u(i) \leq \frac{1}{i}$ (conform (4.1) şi Teoremei 1.8, Secţiunea 1.3) .

b) Dacă $n_0 \geq \mu\left(F_{n_0}(f)\right)$, atunci $u(i) = u(i,n)$ pentru oricare i şi oricare $n \geq n_0$. Această afirmaţie este justificată după cum urmează. Pentru oricare i, avem $\underline{f}(i) \leq f$, prin urmare $F_{n_0}\left(\underline{f}(i)\right) \subset F_{n_0}(f)$ şi aceasta implică $\mu\left(F_{n_0}\left(\underline{f}(i)\right)\right) \leq \mu\left(F_{n_0}(f)\right) \leq n_0$. Apoi, Teorema 4.3 implică $u(i) = (S)\int \underline{f}(i)\, d\mu = (S)\int f(i,n_0)\, d\mu = u(i,n_0) = (S)\int f(i,n)\, d\mu = u(i,n)$, if $n \geq n_0$.

Întorcându-ne la targetul nostru, calculul aproximativ $u \overset{def}{=} (S)\int f d\mu$, considerăm un număr stbilit $0 < \varepsilon < 1$. Trebuie să aflăm i şi n astfel încât

$$|u - u(i,n)| = u - u(i,n) < \varepsilon.$$

Acest lucru se va face fie folosind metoda simplă în doi paşi, fie folosind metoda teoremei de convergenţă iterată şi estimările de mai sus.

4.3.2 Calcul folosind Metoda Simplă în Doi Paşi

Pentru orice i şi n în $\mathbf{N}^*$, avem

$$|u - u(i,n)| = \left|(S)\int f d\mu - (S)\int f(i,n)\, d\mu\right| \leq$$

$$\leq \left|(S)\int f d\mu - (S)\int \underline{f}(i)\, d\mu\right| + \left|(S)\int \underline{f}(i)\, d\mu - (S)\int f(i,n)\, d\mu\right|.$$

În cazul (STD):

Putem lua i_0 astfel încât $\mu\left(F_{i_0}(f)\right) \leq i_0$, deci condiţia $\mu\left(F_i(f)\right) \leq i$ este îndeplinită pentru orice $i \geq i_0$ iar asta duce la

$$(S)\int f d\mu = (S)\int \underline{f}(i)\, d\mu.$$

Putem lua n astfel încât $\frac{1}{n} < \varepsilon$ $\left(\text{de exemplu } n = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1\right)$ iar asta duce la (pentru orice i)

$$\left|(S)\int \underline{f}(i)\,d\mu-(S)\int f(i,n)\,d\mu\right|<\varepsilon.$$

În final, avem $|u-u(i,n)|<\varepsilon$.

În cazul (SDT):

Putem lua i astfel încât $\frac{1}{i}<\varepsilon$ $\left(\text{de exemplu } i=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1\right)$ şi asta duce la

$$\left|(S)\int f d\mu-(S)\int \underline{f}(i)\,d\mu\right|<\varepsilon.$$

Putem lua n_0 astfel încât $\mu(F_{n_0}(f))\leq n_0$ (deci condiţia $\mu(F_n(f))\leq n$ este îndeplinită pentru orice $n\geq n_0$) iar asta duce la (pentru orice i şi orice $n\geq n_0$)

$$(S)\int \underline{f}(i)\,d\mu=(S)\int f(i,n)\,d\mu.$$

La final, avem $|u-u(i,n)|<\varepsilon$.

4.3.3 Calcul folosind Teorema de Convergenţă Iterată

Teorema de Convergenţă Iterată

Fie (X,d) un spaţiu imetric. Asumăm că $(u(i,n))_{i,n\geq 1}$este o secvenţă dublă în X astfel încât:

a) Pentru orice $i\in\mathbf{N}^*$, există $\lim_n u(i,n)=u(i)\in X$.

b) Există $\lim_i u(i)=u\in X$.

Atunci, există o funcţie crescătoare $\sigma:\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$(cu $\sigma(\mathbf{N}^*)=\mathbf{N}^*$) astfel încât $\lim_n u(\sigma(n),n)=u$ $\left(\text{sintetic: } \lim_i\lim_n u(i,n)=\lim_n u(\sigma(n),n)=u\right)$.

Algoritmul. Viteza de convergenţă

Pasul 1. Definim secvenţa strict crescătoare $(n_i)_i$ astfel încât

$$(n\geq n_i)\Rightarrow\left(d(u(i,n),u(i))<\frac{1}{i}\right).$$

Pasul 2. Definim secvenţa strict crescătoare $(i_p)_p$ astfel încât

$$(i\geq i_p)\Rightarrow\left(d(u(i),u)<\frac{1}{p}\right).$$

Pasul 3. Definim

$$p(\varepsilon)=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1.$$

Pasul 4. Definim

$$n(\varepsilon) = n_{i_{p(\varepsilon)}} + 1.$$

Pasul 5. Calculăm

$$\sigma(n(\varepsilon)) = \sigma\left(n_{i_{p(\varepsilon)}} + 1\right) = i_{p(\varepsilon)}.$$

Pasul 6. Aproximarea "bună" este

$$u(\sigma(n(\varepsilon)), n(\varepsilon)) = u\left(i_{p(\varepsilon)}, n_{i_{p(\varepsilon)}} + 1\right)$$

a.î. $u(i,n)$ cu $i = i_{p(\varepsilon)}, n = n_{i_{p(\varepsilon)}} + 1$ şi avem

$$d(u, u(i,n)) < \varepsilon. \square$$

Aplicăm algoritmul astfel:

– În cazul *Strategiei Trunchiere – Discretizare,* ştim că $|u(i,n) - u(i)| \leq \frac{1}{n}$ pentru orice i şi trebuie să avem, pentru $n \geq n_i$, inegalitatea $|u(i,n) - u(i)| < \frac{1}{i}$. Va fi suficient să avem $\frac{1}{n} < \frac{1}{i}$, i.e. $n > i$. Putem lua $(n_i)_i$ dat prin $n_i = i + 1$. De asemenea, ştim că dacă $i_0 \geq \mu(F_{i_0})$,avem $u(i) = u$ pentru orice $i \geq i_0$. Trebuie să avem $|u(i) - u| < \frac{1}{p}$ pentru orice $i \geq i_p$. Putem lua $i_p = i_0 + p$.

– În cazul *Strategiei Discretizare – Trunchiere,* ştim că, dacă $n_0 \geq \mu(F_{n_0})$, avem $u(i,n) = u(i)$, pentru orice i şi orice $n \geq n_0$ şi trebuie să avem $|u(i,n) - u(i)| < \frac{1}{i}$ pentru $n \geq n_i$. Putem lua $n_i = n_0 + i$. De asemenea, ştim că $|u(i) - u| < \frac{1}{i}$ şi trebuie să avem, pentru $i \geq i_p$, $|u(i) - u| < \frac{1}{p}$. Va fi suficient să avem $\frac{1}{i} < \frac{1}{p}$, a.î. $i > p$. Putem lua $i_p = p + 1$. $\square$

4.3.4 Remarci referitoare la Metoda în Doi Paşi în cazul Funcţiilor Mărginite. Reducerea Calculului

Reducerea Calculului pentru Metoda Simplă în Doi Paşi

– În cazul *Strategiei Trunchiere – Discretizare,* luăm $i_0 \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $i_0 \geq M$, prin urmare $(S)\int f d\mu = (S)\int \underline{f}(i_0)\, d\mu$. Atunci, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$:

$$|u - u(i_0, n)| = \left|(S)\int f d\mu - (S)\int f(i_0, n)\, d\mu\right| \leq$$

$$\leq \left|(S)\int f d\mu - (S)\int \underline{f}(i_0)\, d\mu\right| + \left|(S)\int \underline{f}(i_0)\, d\mu - (S)\int f(i_0,n)\, d\mu\right| =$$

$$= \left|(S)\int \underline{f}(i_0)\, d\mu - (S)\int f(i_0,n)\, d\mu\right| \leq \frac{1}{n}.$$

Luăm n astfel încât $\frac{1}{n} < \varepsilon$ $\left(\text{e.g. } n = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1\right)$ şi avem

$$|u - u(i_0,n)| < \varepsilon$$

(doar $u(i_0,n)$ poate fi calculat).

– În cazul *Strategiei Discretizare – Trunchiere,* luăm $n_0 \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $n_0 \geq M$, prin urmare $n_0 \geq \underline{f}(i)$ pentru orice $i \in \mathbf{N}^*$, avem $(S)\int f(i,n_0)\, d\mu = (S)\int \underline{f}(i)\, d\mu$. În consecinţă, pentru orice $i \in \mathbf{N}^*$:

$$|u - u(i,n_0)| = \left|(S)\int f d\mu - (S)\int f(i,n_0)\, d\mu\right| \leq$$

$$\leq \left|(S)\int f d\mu - (S)\int \underline{f}(i)\, d\mu\right| + \left|(S)\int \underline{f}(i)\, d\mu - (S)\int f(i,n_0)\, d\mu\right| =$$

$$= \left|(S)\int f d\mu - (S)\int \underline{f}(i)\, d\mu\right| \leq \frac{1}{i}.$$

Luăm i astfel încât $\frac{1}{i} < \varepsilon$ $\left(\text{e.g. } i = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1\right)$ şi avem

$$|u - u(i,n_0)| < \varepsilon$$

(doar $u(i,n_0)$ poate fi calculat). $\square$

Reducerea Calculului pentru Teorema de Convergenţă Iterată

– În cazul *Strategiei Trunchiere – Discretizare,* luăm $i_0 \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $i_0 \geq M$ şi din nou vedem că $|u(i_0,n) - u(i_0)| \leq \frac{1}{n}$. Putem lua $n_i = i + 1$. Avem $u(i) = u(i_0) = u$ pentru $i \geq i_0$, prin urmare inegalitatea $|u(i) - u| < \frac{1}{p}$ este validă pentru orice $i \geq i_0$. Putem lua $i_p = i_0 + p$ pentru a avea o secvenţă strict crescătoare.

– În cazul *Strategiei Discretizare – Trunchiere,* luăm $n_0 \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $n_0 \geq M$. Avem $u(i,n) = u(i,n_0) = u(i)$ for any $n \geq n_0$ şi orice $i \in \mathbf{N}^*$ (pentru că $n_0 \geq \underline{f}(i)$ pentru orice $i \in \mathbf{N}^*$). Putem lua $n_i = n_0 + i$ pentru a avea o secvenţă strict crescătoare. Pentru că $|u(i) - u| < \frac{1}{i}$, putem lua $i_p = p + 1$. $\square$

4.3.5 Aplicaţia Finală

Începem prin a defini, pentru orice $p \in \mathbf{N}^*$, mulţimea $A_p \stackrel{def}{=} \bigcup\limits_{n=p}^{\infty} \left[n, n + \frac{1}{2^n}\right]$. De asemenea, fie $A \stackrel{def}{=} A_1$. Dacă m este o măsură Lebesgue pe $\mathbf{R}$, avem $m(A) = 1$ şi $m(A_p) = \frac{1}{2^{p-1}}$ pentru orice $p \in \mathbf{N}^*$.

Prima Parte.

Considerăm funcţia $h : [1, \infty) \to \mathbf{R}_+$ dată prin

$$h(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \in A \\ 1, \text{ dacă } x \notin A \end{cases}.$$

Putem calcula $F_\alpha \stackrel{def}{=} F_\alpha(h)$ pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}_+$. Pentru $0 \le \alpha \le 1$, avem $F_\alpha = [1, \infty)$. Pentru $1 < \alpha \le \frac{1}{2} + 1$, avem $F_\alpha = \left[\alpha, 1 + \frac{1}{2}\right] \cup A_2$ şi pentru $1 + \frac{1}{2} < \alpha < 2$, avem $F_\alpha = A_2$. Continuăm, pentru $n \ge 2$, avem:

– pentru $n \le \alpha \le n + \frac{1}{2^n}$, $\quad F_\alpha = \left[\alpha, n + \frac{1}{2^n}\right] \cup A_{n+1}$;

– pentru $n + \frac{1}{2^n} < \alpha < n + 1$, $\quad F_\alpha = A_{n+1}$.

Considerând un spaţiu măsurabil monoton $([1, \infty), \mathcal{T}, \mu)$, unde $\mathcal{T}$ = mulţime Borel pe $[1, \infty)$ şi $\mu : \mathcal{T} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ este o măsură Lebesgue pe $[1, \infty)$, vedem că:

– pentru $0 \le \alpha \le 1$, $\quad \mu(F_\alpha) = \infty$;

– pentru $1 < \alpha \le 1 + \frac{1}{2}$, $\quad \mu(F_\alpha) = 2 - \alpha$;

– pentru $1 + \frac{1}{2} < \alpha < 2$, $\quad \mu(F_\alpha) = \frac{1}{2}$

şi, dacă $n \ge 2$:

– pentru $n \le \alpha \le n + \frac{1}{2^n}$, $\quad \mu(F_\alpha) = n + \frac{1}{2^{n-1}} - \alpha$;

– pentru $n + \frac{1}{2^n} < \alpha < n + 1$, $\quad \mu(F_\alpha) = \frac{1}{2^n}$.

Acum, putem demonstra că $(S) \int h d\mu = 1$. Într-adevăr, pentru $0 \le \alpha \le 1$, avem $\mu(F_\alpha) = \infty > \alpha$, prin urmare $\alpha \wedge \mu(F_\alpha) = \alpha$. Pentru $\alpha > 1$, putem vedea că $\mu(F_\alpha) < \alpha$, prin urmare $\alpha \wedge \mu(F_\alpha) = \mu(F_\alpha)$. Este adevărat, întâi, pentru $1 < \alpha < 1 + \frac{1}{2}$, unde $\mu(F_\alpha) = 2 - \alpha < \alpha$. Apoi, dacă $\alpha \ge 1 + \frac{1}{2}$, luăm $1 < \alpha_0 < 1 + \frac{1}{2}$ şi avem $\mu(F_\alpha) \le \mu(F_{\alpha_0}) < \alpha_0 < \alpha$. Cu aceste valori, putem vedea că $\alpha \wedge \mu(F_\alpha) < 1$ pentru orice $\alpha \ne 1$, prin urmare $1 = 1 \wedge \mu(F_1) = \sup\limits_{\alpha \in [0,\infty)} \alpha \wedge \mu(F_\alpha) = (S) \int h d\mu$. Este de notat faptul că calculul $(S) \int h d\mu$ nu este "sharp", pentru că $(S) \int h d\mu = 1$ nu este o soluţie a ecuaţiei $\alpha = \mu(F_\alpha)$ (această ecuaţie nu are soluţie).

A Doua Parte.

Bazându-ne pe Prima Parte, vom studia un exemplu mai complicat. Spaţiul măsurabil luat în considerare va fi $(T, \mathcal{T}, \mu)$, unde $T = [0, \infty)$, $\mathcal{T}$ = o mulţime Borel pe $[0, \infty)$ şi $\mu : \mathcal{T} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ va fi o măsură Lebesgue. Vom studia funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}_+$, definită prin (vezi Prima Parte)

$$f(x) = \begin{cases} h(x), & \text{dacă } x \in [1, \infty) \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} x\right), & \text{dacă } x \in [0, 1) \end{cases}.$$

Rezultă că, pentru orice $x \in \mathbf{R}_+$, avem $F_\alpha(f) = A_\alpha \cup B_\alpha$, unde

$$A_\alpha = F_\alpha(h) = \{x \in [1, \infty) \mid f(x) = h(x) \geq \alpha\}$$

şi

$$B_\alpha = \left\{x \in [0, 1) \,|\, f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} x\right) \geq \alpha\right\} = \left[\frac{2}{\pi} \arctan \alpha, 1\right)$$

cu $\mu(B_\alpha) = 1 - \frac{2}{\pi} \arctan \alpha$. Pentru că $\mu(F_\alpha(f)) = \mu(A_\alpha) + \mu(B_\alpha)$, pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}_+$, vedem că:

– pentru $0 \leq \alpha \leq 1$, $\quad \mu(F_\alpha) = \infty$;

– pentru $1 < \alpha \leq 1 + \frac{1}{2}$, $\quad \mu(F_\alpha) = 3 - \alpha - \frac{2}{\pi} \arctan \alpha$;

– pentru $1 + \frac{1}{2} < \alpha < 2$, $\quad \mu(F_\alpha) = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \arctan \alpha$;

şi, dacă $n \geq 2$:

– pentru $n \leq \alpha \leq n + \frac{1}{2^n}$, $\quad \mu(F_\alpha) = n + 1 + \frac{1}{2^{n-1}} - \alpha - \frac{2}{\pi} \arctan \alpha$ (în particular, $\mu(F_n) = 1 + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2}{\pi} \arctan n \underset{n}{\longrightarrow} 0$ şi Condiţia (G) este îndeplinită);

– for $n + \frac{1}{2^n} < \alpha < n + 1$, $\quad \mu(F_\alpha) = 1 + \frac{1}{2^n} - \frac{2}{\pi} \arctan \alpha$.

Se poate verifica că funcţia $\alpha \to \mu(F_\alpha)$ este continuă pe $(1, \infty)$. Vom folosi o estimare preliminară, anume, pentru orice $2 \leq n \in \mathbf{N}$:

$$\mu(F_n) = 1 + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2}{\pi} \arctan n \leq 1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{\pi} \arctan n = 1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{n} < \frac{1}{n} + \frac{2}{\pi} \frac{1}{n} < \frac{2}{n}.$$

Acum, ne pregătim să calculăm $(S) \int f d\mu$ aproximativ, folosind metoda celor doi paşi. Calculul va fi dat cu o eroare mai mică decât $\varepsilon = \frac{1}{100}$.

Calcul cu Metoda Simplă a celor Doi Paşi

– În cazul *Strategiei Trunchiere – Discretizare,* putem lua $i_0 = 2$, pentru că, în acest caz, $\mu(F_{i_0}) < i_0$ $\left(\text{vezi estimarea preliminară} : \mu(F_{i_0}) < \frac{2}{i_0}\right)$ şi orice $i \geq 2$ va fi satisfăcător. De asemenea, luăm $n = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 = 101$. Aproximarea "bună" este $u(i, n) =$

$u(2,101)$.

– În cazul *Strategiei Discretizare – Trunchiere,* calculele sunt similare cu cele din cazul (STD), interschimbând i şi n.

Folosind un program JavaScript obţinem (evident, egale) valorile

$u(2,101) = 1.2178217821782178$ (STD)

$u(101,2) = 1.2178217821782178$ (SDT).

Calcul folosind Teorema de Convergenţă Iterată

Conform algoritmului, putem lua $p(\varepsilon) = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1 = 200 + 1 = 201$.

– În cazul *Strategiei Trunchiere – Discretizare,* putem lua $n_i = i + 1$, $i_p = i_0 + p$ şi $i_0 = 2$. Conform algoritmului:

$$i_{p(\varepsilon)} = i_0 + p(\varepsilon) = 2 + 201 = 203$$

$$n(\varepsilon) = n_{i_{p(\varepsilon)}} + 1 = n_{203} + 1 = 203 + 1 + 1 = 205$$

$$\sigma(n(\varepsilon)) = i_{p(\varepsilon)} = 203.$$

Aproximarea "bună" este

$$u(\sigma(n(\varepsilon)), n(\varepsilon)) = u(203, 205).$$

Utilizând un program JavaScript am obţinut valoarea

$$u(203, 205) = 1.2177295007254347.$$

– În cazul *Strategiei Discretizare – Trunchiere,* putem lua $i_p = p + 1$, $n_i = n_0 + i$ şi $n_0 = 2$. Conform algoritmului:

$$i_{p(\varepsilon)} = i_{201} = 202.$$

$$n(\varepsilon) = n_{i_{201}} + 1 = 2 + i_{201} + 1 = 2 + 202 + 1 = 205$$

$$\sigma(n(\varepsilon)) = i_{p(\varepsilon)} = 202.$$

Aproximarea "bună" este

$$u\left(\sigma\left(n\left(\varepsilon\right)\right),n\left(\varepsilon\right)\right)=u\left(202,205\right).$$

Utilizând un program JavaScript am obţinut valoarea

$$u\left(202,205\right)=1.2177295007254347.$$

Remarcă Finală.

De fapt, calculul $(S)\int fd\mu$ poate să fie făcut brusc. Anume, *folosind calculul aproximativ anterior*, am văzut că $(S)\int fd\mu\in\left(1,1+\frac{1}{2}\right)$. Acest lucru ne determină să căutăm o soluţie $\alpha_0\in\left(1,1+\frac{1}{2}\right)$ a ecuaţiei $\alpha=\mu\left(F_\alpha\left(f\right)\right)$ şi această soluţie va fi cu siguranţă egală cu $(S)\int fd\mu$. Pentru $\alpha\in\left(1,1+\frac{1}{2}\right)$, ecuaţia $\alpha=\mu\left(F_\alpha\left(f\right)\right)$ devine

$$\left(\alpha=3-\alpha-\frac{2}{\pi}\arctan\alpha\right)\Leftrightarrow\left(\alpha+\frac{1}{\pi}\arctan\alpha=\frac{3}{2}\right).$$

Ultima ecuaţie are soluţie unică $\alpha_0\in\left(1,1+\frac{1}{2}\right)$. Într-adevăr, considerând funcţia continuă strict crescătoare $\varphi:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$, $\varphi\left(\alpha\right)=\alpha+\frac{1}{\pi}\arctan\alpha$, avem $\varphi\left(1\right)=1+\frac{1}{4}<\frac{3}{2}$ şi $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{3}{2}>\frac{3}{2}$, deci există α_0 (unică) astfel încât $\varphi\left(\alpha_0\right)=\frac{3}{2}$.

Rezolvând numeric ecuaţia $\alpha+\frac{1}{\pi}\arctan\alpha=\frac{3}{2}$ obţinem soluţia $\alpha_0=1.21872201352426$ (folosind Matlab) care confirmă rezultatul precedent.

Concluzii

În această teză, am studiat noi direcţii de aplicare a teoriei măsurii generalizate, folosind integralele Choquet şi Sugeno, în următoarele domenii: economie - piaţa de capital, psihologie şi calcul aproximativ.

În domeniul economic am studiat un nou model de decizie matematică bazat pe integrala Choquet. Am introdus o metodă de selectare a celor mai probabili viitori clienţi investiori (investitori virtuali) ai unei companii de brokeraj pe piaţa de capital. Considerăm că această metodă este nouă şi poate fi folosită în diverse situaţii de decizie.

În domeniul psihologiei am studiat câteva modele matematice bazate pe integrala Choquet, descriind modul în care sunt procesate undele de tip EEG pentru a caracteriza nivelul de Deschidere şi nivelul de Anxietate. Modelele au fost validate comparând valorile lor cu valorile determinate prin utilizarea metodelor clasice (teste psihologice). Am construit modele de agregare, folosind datele rezultate din măsurătorile subiecţilor. Am folosit integrale nonliniare (integrala Choquet) ca instrument de fuziune (Data mining). Aceste modele matematice pot fi considerate modele de învăţare automată. În câţiva ani, în funcţie de rezultatele cercetărilor din domeniul psihologiei, aceste modele pot fi rafinate şi aprobate şi pot deveni utile tuturor categoriilor de psihologi.

În domeniul calculului aproximativ am studiat o procedură practică pentru calculul aproximativ al integralei Sugeno a unei funcţii măsurabile pozitive generale care respectă o măsură generalizată monotonă. Am folosit metode în doi paşi (metoda simplă în doi paşi şi metoda topologică folosind teorema de convergenţă iterată). Aceste metode reduc calculul general la calculul bine-cunoscut în cazul discret finit, care poate fi realizat cu metode asistate de calculator.

Dezvoltări viitoare

Scopul acestei teze de doctorat este de a dezvolta noi direcţii de aplicaţii ale teoriei măsurii generalizate, numită şi teoria fuzzy, folosind integralele Choquet şi Sugeno. Am dezvoltat noi modele matematice în domeniile pieţei de capital, psihologiei şi calculului aproximativ.

Bazându-ne pe modelele matematice dezvoltate, putem continua cercetările în domeniile abordate.

În domeniul economic putem continua crearea unui model de decizie în domeniul bancar. De exemplu, un model pentru o bancă care trebuie să selecteze cei mai eligibili clienţi pentru a acorda credite imobiliare.

În domeniul psihologiei, putem continua cercetările folosind un nou aparat de tip NeuroSky, cu doi senzori activi, pentru măsurarea undelor EEG (am folosit un aparat cu un singur senzor activ). Un inconvenient major al modelelor create de noi este că măsura este recalculată de fiecare dată, iar cu un volum foarte mare de date, avem nevoie de putere mare de calcul. În acest sens, metoda noastră poate fi rafinată, încercăm să reutilizam vechea măsură şi noile date pentru a calcula o măsură nouă, mai precisă. O altă direcţie viitoare este folosirea teoriei măsurii generalizate şi a integralelor nonliniare pentru a face predicţii cu privire la crizele pacienţii cu epilepsie, deoarece există cercetări de specialitate care arată că undele EEG se modifică la pacienţii cu epilepsie, înainte de o nouă criză.

O idee de dezvoltare viitoare legată de integrala Sugeno, ar fi folosirea metodei prezentate în această teză pentru a reface calculele din anumite lucrări de specialitate în care măsurile au fost discretizate forţat şi ulterior utilizate pentru calcul.

Bibliografie

1. American Psychiatric Association, Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders, DSM-5, 5th edition, Washington DC, 2013.

2. O.M.Bazanova, D.Vernon, Interpreting EEG alpha activity, Neuroscience and Biobehavioral Reviews, vol. 44, pp 94–110, 2014.

3. G. Beliakov, M. Gagolewski, S. James, DC optimization for constructing discrete Sugeno integrals and learning nonadditive measures, Optimization, Published online: 26 Dec 2019, https://doi.org/10.1080/02331934.2019.1705300.

4. G. Beliakov, S. James, J.-Z. Wu, Discrete Fuzzy Measures. Computational Aspects, Springer, 2020.

5. M. Boczek, M. Kaluszka, Sharp bounds of Jensen type for the generalized Sugeno integral, arXiv: 1809.08303v1 [math.FA], 21 Sep 2018.

6. L. M. De Campos, M. Jorge Bolaños, Characterization and comparison of Sugeno and Choquet integrals, Fuzzy Sets and Systems, vol.52, pp. 61-67, 1992.

7. E. Catană, G.C. Costache, D. Petre, S. Ilie, R.V. Paraschiv, 3D Reality Perception By Operator And Sensors, Proceeding of National Conference Energy And Ballistic Systems – SEB 2013, Military Technical Academy, Bucharest, 2013

8. A. Chisholm, An Introduction to Capital Markets: Products, Strategies, Participants, John Wiley & Sons, 2002.

9. I.Chiţescu, A.Plăviţu, Computing Choquet integrals, Fuzzy Sets and Systems, vol. 327, pp 46-68, 2017.

10. I. Chiţescu, **M. Giurgescu (Manea)**, A. Plăviţu, Computing Sugeno integrals, Fuzzy Sets and Systems, vol. 465, 2023, https://doi.org/10.1016/j.fss.2023.03.016.

11. I. Chiţescu, D. Stănică, A.Plăviţu, Existence and uniqueness of countable λ-measures with preassigned values, Fuzzy Sets and Systems, vol. 244, pp. 1-19, 2014.

12. I. Chiţescu, **M. Giurgescu (Manea)**, T. Paraschiv, Looking for Virtual Investors, Proceedings of Fifth International Congress of Information and Communication Technology, Springer, London, England, vol.1, pp. 119-128, September 2020, https://doi.org/10.1007/978-981-15-5856-6.

13. I. Chiţescu, The Sugeno integral. A point of view, Information Sciences, vol. 582, pp. 648-664, 2022.

14. I. Chiţescu, **M. Giurgescu (Manea)**,T. Paraschiv, Using the Choquet integral for the determination of the Anxiety degree, Research Square, https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-1027357/v1.

15. M. Chraif, R.V. Paraschiv R.V., Specific Measurement In Psychology, Proceeding of The International Conference Education and Creativity for a Knowledge-Based Society, Titu Maiorescu University, Bucharest, Romania, pp. 139-144, 2015

16. M. Couceiro, D. Dubois, H. Prade, T. Waldhauser, Decision-Making with Sugeno Integrals: Bridging the Gap Between Multicriteria Evaluation and Decision Under Uncertainty, Order 33, pp 517-535, 2016.

17. D. Dubois, H. Fargier, A. Rico, Commuting Double Sugeno Integrals, International Journal of Uncertainty Fuzziness and Knowledge-Based Systems, vol.27, pp 1-38, 2019.

18. D. Dubois, H. Prade, A. Rico, B. Teheux, Generalized Sugeno Integrals, In: 16−−th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU 2016), Eindhoven, Netherlands, pp 363-374, 2016.

19. D. Dubois, H. Prade, A. Rico, B. Teheux, Generalized qualitative Sugeno Integrals, Information Sciences vol.415-416, pp 429-445, 2017.

20. D. Dubois, A. Rico, New axiomatization of discrete quantitative and qualitative possibilistic integrals, Fuzzy Sets and Systems vol.343, pp 3-19, 2018.

21. N. Dunford, J. Schwartz, Linear Operators. Part I, Interscience Publishers, Inc., 1967.

22. G.Gennady, G.Knyazev, EEG correlates of personality types, Netherlands Journal of Psychology, vol. 62(2), pp 78-87, 2006.

23. **M. Giurgescu (Manea)**, I. Chiţescu, T. Paraschiv, C Ştefan, A diagnostication method of Openness using the nonlinear integrals, Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys., Vol. 82, pp. 231-234, Iss. 1, 2020.

24. **M. Giurgescu (Manea)**, I. Chiţescu, C.M. Milea, A mathematical model which characterizes the level of Openness, Proceedings of The International Conference Education and Creativity for a Knowledge-Based Society, XIIth Edition, Titu Maiorescu University, Bucharest, Romania, November 2018, https://ssrn.com/author=3343042

25. **M. Giurgescu (Manea)**, Towards a diagnostication method of anxiety using the Choquet integral, Proceedings of The Technical-Scientific Conference of Students, Masters and PhD Students, vol.1, Technical University of Moldova, Chişinău, Republic of Moldova, March 2019.

26. **M. Giurgescu (Manea)**, I. Chiţescu, T. Paraschiv, Using a generalized measure to determine the Openness level, Proceedings of the International Conference Education and Creativity for a Knowledge-Based Society, XIVth Edition, Titu Maiorescu University, Bucharest, Romania, November 2020.

27. M. Grabisch, T. Murofushi, M. Sugeno (editors), Fuzzy Measures and Integrals. Theory and Applications, PhysicaVerlag, 2000.

28. M.Grabisch, Set Functions, Games and Capacities in Decision Making, Springer, 2016.

29. A.M.Grass, F.A.Gibbs, A Fourier transform of the electroencephalogram, J.Neurophysiol, vol.1, pp 521–526, 1938.

30. D.Grigore, R.V. Paraschiv R.V, L.O. Anghelina, Multiple Stimuli Action On The GSR Functions Involved in the Remote Motion Command and Control, Proceeding of International Conference Greener and Safer Energetic and Ballistic Systems (GSEBS), Military Technical Academy, Bucharest, Romania, 26 – 27 May 2016.

31. D. Grigore, R.V. Paraschiv, Signal Processing GSR For Motion Control, Proceedings of the International Conference Education and Creativity for a Knowledge-Based Society, Titu Maiorescu University, Bucharest, Romania, pp. 169-178, 2016.

32. D. Grigore, G.C. Costache, C. Ştefan, R.V. Paraschiv, Waking Capacity Evaluation By Direct Measurement, Proceedings of the International Conference Education and Creativity for a Knowledge-Based Society, Titu Maiorescu University, Bucharest, Romania, pp. 105-111, 2014.

33. R. Halaš, R. Mesiar, J. Pócs, A new characterization of the discrete Sugeno integral, Information Fusion, vol. 29, pp 84-86, 2016.

34. T.Harmony, The functional significance of delta oscillations in cognitive processing, Frontiers in Integrative Neuroscience, https://doi.org/10.3389/fnint.2013.00083.

35. D.E.Hinkle, W.Wiersma, S.G.Jurs, Applied Statistics for the Behavioral Sciences, 5th edition, Houghton Mifflin Company, Boston, New York, 2003.

36. J.W. Hughes, C.M. Stoney, Depressed mood is related to high-frequency heart rate variability during stressors, Psychosomatic Medicine, vol.62, pp.796-803, 2000.

37. H. Jasper, Report of committee on methods of clinical exam in EEG, Electroencephalogr. Clin. Neurophysiol, vol.10, 1958.

38. N. Kane, J. Acharya, S. Benickzy, L. Caboclo, S. Finnigan, P. W. Kaplan, H. Shibasaki, R. Pressler, M. J A M van Putten, A revised glossary of terms most commonly used by clinical electroencephalographers and updated proposal for the report format of the EEG findings, Revision 2017, Corrected 2019, Clin.Neurophy.Pract, vol.4, 133, 2019.

39. J. Kawabe, The bounded convergence in measure theorem for nonlinear integral functionals, Fuzzy Sets and Systems, vol.271, pp 31-42, 2015.

40. J. Kawabe, Weak convergence of nonadditive measures based on nonlinear integral functionals, Fuzzy Sets and Systems, vol.289, pp 1-15, 2016.

41. J. L. Kelley, General Topology, American Book – Van Nostrand – Reinhold, 1955.

42. G.Knyazev, E.Merkulova, A.Savostyanov, A.Bocharov, A.Saprigyn, Personality and EEG correlates of reactive social behavior, Neuropsychologia, vol. 124, pp 98-107, 2019.

43. C.M. Milea, I. Chiţescu, **M. Giurgescu (Manea)**, Applications of the Laplace transform and Choquet's integral, Proceedings of The International Conference Education and Creativity for a Knowledge-Based Society, XIIth Edition, Titu Maiorescu University, Bucharest, Romania, November 2018.

44. E. Niedermeyer and F. Lopes da Silva, eds, Electroencephalography, Basic Principles, Clinical Applications and Related Fields, 4th edition. Lippincott, Williams and Wilkins, Philadelphia, Pennsylvania, 1999.

45. E.Niedermeyer, F. Lopes da Silva, eds, The normal EEG of the waking adult, 4^{th} edition, Lippincott, Williams and Wilkins, Philadelphia, Pennsylvania, 1999.

46. P.L. Nunez, Neocortical Dynamics and Human EEG Rhythms, Oxford University Press, New York, pp 179, 1995.

47. E.Pap (editor), Handbook of Measure Theory, two volumes, Elsevier, North Holland, 2002.

48. E. Pap, Null-Additive Set Functions, Kluwer, 1995.

49. R. V. Paraschiv, A. Constantin, **M. Giurgescu (Manea)**, Contributions to studying attention focalized, by processing EEG type waves, Proceedings of The International Conference Education and Creativity for a Knowledge-Based Society, XIIth Edition, Titu Maiorescu University, Bucharest, Romania, November 2018.

50. R.V. Paraschiv, Study on EEG wave amplitude measured with a sensor and academic performance, Proceedings of The International Conference Education and Creativity for a Knowledge-Based Society, Titu Maiorescu University, Bucharest, Romania, 2018.

51. T. Paraschiv, D. Postolea, C. Petrescu, Biocybernetics, Titu Maiorescu University, Bucharest, pp.19-30, 2015.

52. D.J.Paulus, S.Vanwoerden, P.J.Norton, C.Sharp, From neuroticism to anxiety. Examining unique contributions of three transdiagnostic vulnerability factors, Personality and Individual Differences, vol. 94, pp 38-43, 2016.

53. D. Postolea, C. Stefan, D. Ionescu, R.V. Paraschiv R.V., Brain-Computer Interface And Applications In Robotics, Proceeding of National Conference "Energy And Ballistic Systems - SEB 2013", Military Technical Academy, 2013;

54. D.Postolea, A.I. Urichianu, R.V. Paraschiv, Statistical Methods For Processing Of Biosignals, Proceeding of International Conference Greener and Safer Energetic and Ballistic Systems (GSEBS), Military Technical Academy, Bucharest, Romania, 2015.

55. D. Ralescu, G. Adams, The Fuzzy Integral, J. Math. Analysis Appl. vol.75, pp. 562-570, 1980.

56. G. Shafer, A Mathematical Theory of Evidence, Princeton University Press, 1976.

57. F.W. Sharbrough, Nonspecific abnormal EEG patterns, Chapter. 12, Electroencephalography, Basic Principles, Clinical Applications, and Related Fields, Eds E. Niedermeyer and F. Lopes Da Silva, 4^{th} edn., Lippincott, Williams and Wilkins, Philadelphia, Pennsylvania, 1999.

58. H.W.Shipton, EEG analysis: a history and a prospectus, Annual Review of Biophysics and Bioengineering, vol. 4, pp 1–15, 1975.

59. B. Stroustrup, The C++ Programming Language, 4th edition. Addison-Wesley Professional, 2013.

60. M. Sugeno, Theory of Fuzzy Integrals and its Applications. A Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor Engineering at Tokyo Institute of Technology, 1974.

61. V.I. Tănase, M. Puiu, C. Petrescu, R.V. Paraschiv, Investigating, Using NeuroSky and GSR, Caution-Contemplation Indicators and Stability-Instability, Proceedings of The International Conference Education and Creativity for a Knowledge-Based Society, Titu Maiorescu University, Bucharest, Romania, 2013.

62. M. Teplan, Fundamentals of EEG measurements, Measmt Sci. Rev., vol.2(2), 2002.

63. Z.Wang, G. J. Klir, Fuzzy Measure Theory, Springer, 1992.

64. Z.Wang, G. J. Klir, Generalized Measure Theory, Springer, 2009.

65. Z.Wang, R. Yang, K-S. Leung, Nonlinear Integrals and Their Applications in Data Mining, World Scientific, 2010.

66. S. Weber, Decomposable measures and integrals for Archimedean t-conorms, J. Math. Anal., vol.101, pp. 114-138, 1984.

67. L.A.Zadeh, Fuzzy algorithms, Information and Control, San Diego, vol. 12(2), pp. 94-102, 1968.

68. L.A.Zadeh, Fuzzy logic=computing with words, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 4(2), pp. 103-111, 1996.

69. L.A.Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control, San Diego, vol. 8(3), pp. 338-353, 1965.

70. L.A.Zadeh, Quantitative fuzzy semantics, Information Sciences, vol. 3(2), pp. 159-176, 1971.