

Universitatea din Pitești
Facultatea de Matematică - Informatică
Școala Doctorală de Matematică

Spații normate de funcții măsurabile vectoriale

Teză de doctorat

Rezumat

Conducător științific,
Prof.univ.dr. Ion Chițescu

Doctorand,
Cojocaru (Constandache)
Oana Magdalena

Cuprins

Capitolul 1. Introducere.....	3
Capitolul 2. Noțiuni preliminare	5
Capitolul 3. Spații Kothe-Bochner. Proprietăți fundamentale	8
3.1. Introducere	8
3.2. Noțiuni preliminare.....	8
3.3. Rezultate	10
3.3.1. Completitudinea. Funcții ale căror mulțimi de valori sunt incluse în subspații închise.....	10
3.3.2. Topologia convergenței în ρ -măsură. Relația cu topologia canonică.....	11
3.3.3. Convergența șirurilor	13
4.1 Dualul spațiilor Kothe-Bochner și proprietatea Radon-Nikodym	18
4.2 Spații Kothe-Bochner cu bază Schauder. Proprietăți de aproximare	21
4.3 Spații Kothe-Bochner care sunt spații Hilbert sau hilbertabile.....	23
4.3.1. Noțiuni preliminare.....	23
4.3.2. Spații Kothe-Bochner care sunt spații Hilbert.....	23
4.3.3. Spații Kothe-Bochner hilbertabile.....	24
4.4 Spații Kothe-Bochner care sunt algebre Banach cu unitate	25
Bibliografie	27

Capitolul 1. Introducere

În această teză de doctorat ne ocupăm de diverse aspecte ale teoriei spațiilor Köthe-Bochner. Credem că un scurt istoric al acestei teorii se impune.

Totul începe în 1934, cu articolul seminal [23], semnat de matematicienii germani Gottfried Köthe și Otto Toeplitz. G. Köthe (1905-1989) fusese asistentul lui O. Toeplitz (1881-1940) la Bonn. De altfel, întâlnirea cu Toeplitz i-a schimbat decisiv orientarea lui Köthe (inițial algebrist – are o faimoasă conjectură privind idealele) care a devenit un nume mare în Analiza Funcțională – teoria spațiilor vectoriale topologice. În articolul [23] se introduceau și se studiau așa numitele „Stufenräume” – spații de șiruri care pot fi considerate ca „strămoși” spațiilor Köthe de astăzi și au avut o influență importantă în dezvoltarea ideilor de dualitate în Analiza Funcțională. De notat că G. Köthe a revenit asupra acestor spații într-un singur articol, anume [22].

Punerea în cadrul natural a spațiilor Köthe avea să urmeze, prin lucrările matematicienilor olandezi Wilhelmus Anthonius Josephus Luxemburg (n. 1929) și Adriaan Cornelis Zaanen (1913-2003). Mai precis, în 1955 apare teza de doctorat [26] a lui W.A.J. Luxemburg, sub conducerea lui A.C.Zaanen, viitor membru al Academiei Olandeze. În această teză se introduc spațiile Köthe în forma actuală, ca spații (de clase) de funcții măsurabile – generalizare a spațiilor Lebesgue L^p . Ulterior, cei doi matematicieni olandezi pun la punct teoria spațiilor Köthe într-o serie de articole [27]. Teoria acestor spații Köthe s-a dezvoltat în continuare, prin eforturile celor doi matematicieni olandezi și ale elevilor lor (în special școala condusă de A. C. Zaanen), precum și prin contribuțiile altor matematicieni. De notat că denumirea de „spații Köthe” a fost propusă de J. Dieudonné (v. [14]). Anumite erori din articolul [14] au fost corectate în [30]. O prezentare sistematică a rezultatelor de bază privind spațiile Köthe se găsește în monografia [33] a lui A.C.Zaanen, precum și, în monografia [8] a lui I. Chițescu. Pentru o prezentare mult mai dezvoltată se poate consulta monografia [28].

De foarte multe ori, în teoria spațiilor de funcții apare următoarea idee naturală de generalizare: se consideră, spații de funcții scalare și, apoi, pe cât posibil, se consideră „aceleași spații de funcții” dar de data aceasta, cu valori într-un spațiu mai general decât spațiul scalarilor (de obicei se consideră drept spațiu mai general un spațiu Banach). Când spunem „aceleași spații de funcții” înțelegem că noul spațiu de funcții (cu valori într-un spațiu mai general) este definit printr-o schemă asemănătoare (aproape identică) cu cea folosită la definirea spațiului inițial.

Să considerăm, în acest sens, spațiile lui Lebesgue L^p , urmând schema din [15]. Pentru un spațiu cu măsură $(T, \mathcal{T}, \mu)$ și un număr $1 \leq p < \infty$, spațiul $L^p(\mu)$ se definește după cum urmează. Întâi se definește spațiul $\mathcal{L}^p(\mu)$, format cu toate funcțiile μ -măsurabile $f: T \rightarrow K$ ($K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$, corpul scalarilor) pentru care $\int |f|^p d\mu < \infty$, care este seminormat cu seminorma $f \mapsto (\int |f|^p d\mu)^{1/p} = N_p(f)$. Spațiul nul al acestei seminorme este $M(\mu) = \{f \in \mathcal{L}^p(\mu) | N_p(f) = 0\}$ și este format cu acele funcții $f: T \rightarrow K$ care sunt nule μ -aproape peste tot. Atunci spațiul cât $L^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mu) / M(\mu)$ devine spațiu normat cu norma $\tilde{f} \mapsto N_p(f)$ (pentru orice reprezentant $f \in \tilde{f}$, definiție coerentă).

Trecerea la cazul vectorial se face conform celor discutate anterior. Fie X un spațiu Banach. Întâi se consideră spațiul vectorial $\mathcal{M}_X(\mu) = \{f: T \rightarrow X | f \text{ este } \mu\text{-măsurabilă}\}$ (definiția μ -măsurabilității în cazul vectorial este mai delicată și caracterizarea funcțiilor vectoriale μ -măsurabile a fost definitivată de B.J.Pettis). Pentru orice $f \in \mathcal{M}_X(\mu)$ definim funcția (scalară μ -măsurabilă) $|f|: T \rightarrow \mathbb{R}_+$, dată prin $|f|(t) = \|f(t)\|$. Acum putem defini analogul spațiului $L^p(\mu)$, anume $\mathcal{L}_X^p(\mu) = \{f \in \mathcal{M}_X(\mu) | N_p(f) < \infty\}$ unde $N_p(f) = (\int |f|^p d\mu)^{1/p}$ (remarcăm că notația $N_p(f)$ este aceeași ca în cazul scalar, deoarece în cazul particular scalar reobținem vechiul rezultat). Se vede că $\mathcal{L}_X^p(\mu)$ este seminormat cu seminorma $f \mapsto N_p(f)$ și că spațiul nul al acestei seminorme este $M_X(\mu) = \{f \in \mathcal{L}_X^p(\mu) | N_p(f) = 0\} = \{f: T \rightarrow X | f \text{ este nulă } \mu\text{-aproape peste tot}\}$. Atunci, spațiul cât $L_X^p(\mu) \triangleq \mathcal{L}_X^p(\mu) / M_X(\mu)$ se normează cu norma $\tilde{f} \mapsto N_p(f)$ (pentru orice reprezentant $f \in \tilde{f}$, definiție coerentă).

După cum se vede, spațiile $L_X^p(\mu)$, „generalizarea vectorială” a spațiilor $L^p(\mu)$, au fost obținute prin „translatarea” schemei care generează spațiile $L^p(\mu)$.

Urmând exact același mod de gândire, putem generaliza spațiile Köthe L_p (clase de funcții măsurabile scalare – analogul spațiilor $L^p(\mu)$) ajungând la spațiile Köthe – Bochner $L_X(p)$ (clase de funcții măsurabile vectoriale – analogul spațiilor $L_X^p(\mu)$). Amănuntele de construcție apar în corpul principal al lucrării. Denumirea (standard) de spații Köthe – Bochner este justificată, pe de-o parte de faptul că aceste spații sunt generalizarea vectorială a spațiilor Köthe scalare (în sensul discutat anterior) și, pe de altă parte, de faptul că matematicianul american Salomon Bochner (1899-1982) a extins integrala (scalară abstractă) a lui Lebesgue la integrala vectorială care îi poartă numele.

Teoria spațiilor Köthe – Bochner este foarte recentă (cu începutul în anii 1970). Cu toate acestea, literatura dedicată acestei teorii este deja foarte mare și putem spune că spațiile Köthe – Bochner constituie un capitol cu o identitate bine stabilită în cadrul Analizei Funcționale. În acest sens, monografia [24] cuprinde multe rezultate și o bibliografie extrem de bogată.

Teoria spațiilor Köthe – Bochner are probleme specifice. Semnalăm câteva tipuri de astfel de probleme:

1. Probleme legate de proprietăți valabile în cadrul spațiilor Köthe (scalare) care se păstrează în cadrul mai general al spațiilor Köthe – Bochner. De exemplu, completitudinea spațiului este echivalentă în ambele cazuri cu faptul că norma funcțională generatoare are proprietatea Riesz-Fischer (v. Teorema 3.3.1.8).

2. Probleme de tipul următor: ce legătură este între faptul că spațiul Köthe – Bochner $L_X(p)$ are proprietatea (P) și faptul că, separat, spațiile L_p și X au proprietatea (P)? Avem vreo implicație? Avem echivalență? Sau, poate nu avem nicio legătură.

De exemplu: nu avem niciun răspuns la întrebare, în cazul când (P) este proprietatea Dunford – Pettis. Pe de altă parte, dacă (P) este proprietatea Radon – Nikodým avem echivalență între faptul că $L_X(p)$ are proprietatea (P) și, separat, L_p și X au proprietatea (P) (v. Teorema 3.6.17 din [24]). La fel, dacă (P) este proprietatea de reflexivitate (v. Teorema 4.1.11).

În ceea ce privește chestiunea generală de mai sus, o „regulă de urmat” ar fi următoarea.

- Spunem că o proprietate (P) este ereditară dacă, pentru orice spațiu Banach Y cu proprietatea (P) rezultă că orice subspațiu închis al lui Y are proprietatea (P). De exemplu, reflexivitatea este ereditară.
- Dacă $L_X(\rho)$ are proprietatea ereditară (P), atunci L_ρ și X , separat, au proprietatea (P).

Menționăm că, în demonstrarea Teoremei 4.1.11 privind reflexivitatea lui $L_X(\rho)$ nu am făcut uz de această regulă, preferând demonstrația directă (implicată de rezultatul anterior).

În legătură cu această chestiune, rezultate importante pot fi găsite în [1], [12] și [18] (succesiune de rezultate privind convexitatea uniformă a lui $L_X(\rho)$).

3. Probleme legate de geometria spațiilor Köthe – Bochner. Am menționat, deja, în acest sens, articolele [1], [12], [18] în care este rezolvată succesiv problema convexității uniforme a spațiilor $L_X(\rho)$. În același sens, avem următorul rezultat din [24] (Teorema 3.4.2). Spațiul $L_X(\rho)$ (lucram cu un spațiu cu măsură finită) este strict convex dacă și numai dacă, separat, L_ρ și X sunt strict convexe. Rezultate interesante în acest sens pot fi găsite în [4], [5], [19], [20], [25].

Considerând proprietatea Radon - Nikodým (așa cum este în general acceptat) ca o proprietate geometrică, ne-am referit la ea în Capitolul 4., Teoremele 4.1.7 și 4.1.9. Alte probleme legate de geometria spațiilor Köthe – Bochner nu au fost abordate în prezenta teză.

4. Probleme legate de teoria produselor tensoriale. În mod specific, este clar că avem o scufundare naturală a produsului tensorial $L_\rho \otimes X$ în $L_X(\rho)$. Normând produsul tensorial $L_\rho \otimes X$ cu o cross-normă (normă tensorială) și trecând la completatul $L_\rho \widehat{\otimes} X$ putem discuta despre probleme legate de relații de tipul: $L_\rho \widehat{\otimes} X \subset L_X(\rho)$, $L_\rho \widehat{\otimes} X \supset L_X(\rho)$. Problematicele sunt inspirate de relația clasică $L^1_\mu(\mu) = L^1(\mu) \widehat{\otimes} X$ (adică $L^1_\mu(\mu)$ este completatul lui $L^1(\mu) \otimes X$ pentru norma proiectivă). Putem cita următorul rezultat din [24] (Teorema 6.4.10). Se presupune că L_ρ este separabil și reflexiv (pe un spațiu cu măsură finită) și spațiul Banach X are proprietatea Radon - Nikodým. Atunci $L_\rho \widehat{\otimes} X$ are proprietatea Radon - Nikodým.

Menționăm că nu ne-am ocupat în teză de problemele de acest tip. Intenționăm ca, pe viitor, să abordăm probleme legate de legătura dintre produsele tensoriale și spațiile Köthe – Bochner.

- 5. O problemă deosebit de importantă și naturală este problema studiului operatorilor liniari și continui pe spații Köthe – Bochner. În prezenta teză ne ocupăm de dualul spațiilor Köthe – Bochner (v. Capitolul 4, Teoremele 4.1.7, 4.1.9, 4.1.10).

Cu mențiunea că nu am găsit material bibliografic referitor la teoria generală a operatorilor liniari și continui pe spații Köthe – Bochner, ne propunem ca, pe viitor, să ne ocupăm de această problemă.

În cele ce urmează, prezentăm, pe scurt, conținutul prezentei teze de doctorat, punând în evidență părțile originale. Subliniem faptul că toate rezultatele din teză au fost obținute în colaborare cu colegul Răzvan-Cornel Sfetcu, sub îndrumarea conducătorului științific prof. univ. dr. Ion Chițescu.

Capitolul 2 este intitulat **“Noțiuni preliminare”**. Se prezintă noțiunile și notațiile standard folosite în lucrare, cu accent pe teoria spațiilor Köthe clasice (scalare).

Capitolul 3 este intitulat **“Spații Köthe- Bochner. Proprietăți fundamentale”**. Acest capitol este bazat pe un articol pe care intenționăm să îl publicăm și la a cărei definitivare lucrăm. Se începe cu o introducere (formată din paragrafele 3.1 și 3.2) în care se prezintă spațiile Köthe- Bochner care sunt extinderea vectorială a spațiilor Köthe clasice (scalare). Subliniem, în legătură cu noțiunile preliminare din paragraful 3.2 următoarele două fapte:

- a) Definiția adoptată pentru spațiile Köthe- Bochner este ușor diferită de definiția folosită de Pei-Kee Lin în monografia (acum clasică) [24]. Anume, definiția folosită de noi este mai generală, eliminând anumite condiții din [24] (vezi pag. 149 pentru definiția folosită de Pei-Kee Lin).
- b) Exemplul cu care se încheie paragraful 3.2 este original.

Paragraful 3.3 este intitulat **“Rezultate”**.

Primul subparagraf (numerotat cu 3.3.1) este dedicat completitudinii spațiilor Köthe- Bochner și descrierii spațiilor de funcții cu valori în subspații închise. În esență demonstrăm faptul că spațiile Köthe- Bochner sunt complete atunci și numai atunci când norma funcțională generatoare are proprietatea Riesz-Fischer. De asemenea, arătăm că spațiul în care iau valori funcțiile poate fi nuanțat. Subparagraful 3.3.1 este în întregime original.

Subparagraful 3.3.2 este dedicat topologiei convergenței în ρ -măsură și relației acestei topologii cu topologia canonică a spațiilor Köthe- Bochner. Acest subparagraf folosește ca idee de bază introducerea topologiei în ρ -măsură (care generalizează topologia în măsură și este mai slabă decât topologia canonică) așa cum a fost introdusă în monografia [8] a prof. Ion Chițescu. Dezvoltările ulterioare din subparagraf apar în acest sens. Putem considera ca originală trecerea de la scalar la vectorial în cadrul acestui subparagraf.

Subparagraful 3.3.3 este dedicat convergenței șirurilor în spațiile Köthe- Bochner și este în întregime original. Se prezintă rezultate care generalizează teoremele clasice ale teoriei măsurii privind șirurile de funcții măsurabile. În acest scop, se introduce și generalizarea convergenței asimptotice (aproape uniforme). Folosind în asocieri convergența în topologia canonică, convergența în ρ -măsură și convergența ρ -aproape uniformă, se obțin rezultate de tip Egorov, Slutsky și legături între diversele tipuri de convergență. Subliniem ca fapt important ideea de a folosi norma funcțională introdusă de Dan Tomescu în [32], fapt care a permis obținerea de rezultate fine în absența proprietății Riesz-Fischer (v. Corolarul 3.3.3.12, Propoziția 3.3.3.13 și Corolarul 3.3.3.14). Am ilustrat rezultatele obținute cu numeroase exemple și contraexempluri.

Ultimul capitol, anume capitolul 4, este intitulat **“Spații Köthe- Bochner, proprietăți speciale”**. Anumite părți din acest capitol au fost deja publicate (paragraful 4.2 și 4.3) iar celelalte părți vor fi înaintate spre publicare în mai multe articole.

Primul paragraf, numerotat 4.1, este dedicat dualului spațiilor Köthe- Bochner, în conjuncție cu proprietatea Radon - Nikodým. La început se prezintă câteva noțiuni standard privind Radon - Nikodým. Am considerat necesar să prezint o versiune care poate fi considerată ca originală a teoremei de localizare 4.1.3, cu demonstrație amănunțită. În continuare, restul paragrafului este intitulat **“Rezultate”** și este în întregime original. După o pregătire tehnică, însumând mai multe rezultate, dintre care menționăm Teorema 4.1.5 (Calculul normei în spațiul asociat), se ajunge la rezultatele principale ale paragrafului: Teorema 4.1.7 (Dacă spațiul valorilor X are proprietatea că X' are proprietatea Radon - Nikodým, atunci dualul spațiului Köthe- Bochner $L_X(\rho)$ este exact spațiul Köthe- Bochner asociat $L_{X'}(\rho')$) și “reciproca” ei, anume Teorema 4.1.9 (Dacă dualul unui $L^p(X, \lambda)$ este exact $L^q(X', \lambda)$, λ fiind măsura Lebesgue pe $[0,1]$ și q fiind conjugatul lui p , atunci X' are proprietatea Radon - Nikodým). Ca o consecință se obține un rezultat similar ca ideatică cu rezultatele din paragrafele următoare 4.3 și 4.4, anume Teorema 4.1.11 ($L_X(\rho)$ este reflexiv dacă și numai dacă L_ρ și X sunt simultan reflexive). În Teorema

4.1.14, arătăm că rezultatul din Teorema 4.1.7, obținut în cazul când atât norma funcțională ρ , cât și norma funcțională asociată ρ' , sunt de tip absolut continuu, rămâne valabil în unele cazuri când ρ' nu este de tip absolut continuu.

Paragraful 4.2 este dedicat spațiilor Köthe-Bochner cu bază Schauder și unor calcule de aproximare în astfel de spații. Și acest paragraf este în întregime original. El se bazează pe articolul [9]. Se arată (Teorema 4.2.2) că, dacă X are bază Schauder și norma funcțională ρ este de tip absolut continuu, atunci orice element din spațiul Köthe-Bochner de funcții $L_X(\rho)$ poate fi aproximat cu funcțiile canonice "finit dimensionale". Exemplificăm apoi cu un exemplu concret privind spațiile Lorentz de șiruri acest rezultat, ocazie cu care prezentăm niște calcule de aproximare amănunțite, în două versiuni.

Paragrafele care urmează (i.e. paragrafele 4.3 și 4.4) sunt bazate pe idei fundamentale privind spațiile Köthe clasice (scalare) provenind din articolele [6] și [7], ele făcând trecerea la spațiile Köthe-Bochner. Cu această precizare, considerăm că paragrafele 4.3 și 4.4 pot fi considerate ca fiind în întregime originale.

Paragraful 4.3 este dedicat spațiilor Köthe-Bochner care sunt în același timp și spații Hilbert sau hilbertabile și este bazat pe articolul [10]. În [6] au fost complet caracterizate spațiile Köthe clasice (scalare) L_ρ care sunt și spații Hilbert, ca fiind spații L^2 cu pondere. Folosind acest rezultat, demonstrăm (Teorema 4.3.2.1) că $L_X(\rho)$ este spațiu Hilbert dacă și numai dacă, simultan, X și L_ρ sunt spații Hilbert. Se prezintă și contraexemple aferente. Similar, în Teorema 4.3.3.3 arătăm că $L_X(\rho)$ este hilbertabil dacă și numai dacă, simultan, X și L_ρ sunt hilbertabile (în anumite condiții).

Paragraful 4.4 este dedicat spațiilor Köthe-Bochner care sunt în același timp și algebre Banach cu unitate. În [7] au fost complet caracterizate spațiile Köthe clasice (scalare) L_ρ care sunt și algebre Banach (comutative) cu unitate ca fiind spații echivalente cu spații L^∞ . Demonstrăm (Teorema 4.4.4) că, în condițiile în care X este algebră Banach cu unitate, $L_X(\rho)$ este algebră Banach cu unitate dacă și numai dacă L_ρ este echivalent cu un spațiu L^∞ (sau, echivalent, dacă și numai dacă $L_X(\rho)$ și $L^\infty(X, \mu)$ sunt spații Banach echivalente.

În încheierea acestei introduceri, mulțumesc conducătorului meu științific, prof. univ. dr. Ion Chițescu pentru îndrumarea continuă și ideile pe care mi le-a oferit în timpul elaborării prezentei teze de doctorat.

Capitolul 2. Noțiuni preliminare

Vom considera următoarele notații: $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty) \cup \{\infty\}$, $K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Dacă $f: X \rightarrow Y$ este o funcție și $\phi \neq A \subset X$, notăm cu $f|_A$ restricția lui f la A . Similar, dacă (X, τ) este un spațiu topologic și, $\phi \neq A \subset X$, notăm cu $\tau|_A$ topologia indusă de τ pe A .

Fie $T \neq \emptyset$ și $\mathcal{P}(T)$ mulțimea părților lui T . Pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$ considerăm funcția $\varphi_A: T \rightarrow \mathbb{R}$, funcția caracteristică a lui A , dată prin $\varphi_A(t) = 1$, dacă $t \in A$ și $\varphi_A(t) = 0$, dacă $t \notin A$. Dacă $\varphi: T \rightarrow K$ și X este spațiu normat, vom defini, pentru orice $x \in X$, funcția $\varphi x: T \rightarrow X$ prin $\varphi x(t) = \varphi(t)x$. Pentru orice $f: T \rightarrow X$ definim $\|f\|: T \rightarrow \mathbb{R}_+$, prin $\|f\|(t) = \|f(t)\|$. Dacă A este nevidă vom scrie $(x_i)_{i \in I} \subset A$ pentru o familie de elemente din A , adică $x_i \in A$, oricare ar fi $i \in I$. În particular, dacă $I = \mathbb{N}$, avem un șir $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Dacă $(\Delta, \leq)$ este o mulțime preordonată, avem un șir generalizat $(x_\delta)_{\delta \in \Delta}$. De multe ori vom scrie numai $(x_i)_{i \in I}$ în loc de $(x_i)_{i \in I}$.

Un spațiu cu măsură este un triplet $(T, \mathcal{T}, \mu)$, unde $T \neq \emptyset$ (T oarecare), $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(T)$, $\mathcal{T}$ este o σ -algebra, $\mu: \mathcal{T} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ este măsură (adică $\mu(\emptyset) = 0$ și $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ pentru orice șir $(A_n)_n \subset \mathcal{T}$ disjunct și μ nu este identic nulă ($\mu(T) > 0$)).

În plus, vom presupune că μ este completă, adică: dacă notăm $\mathcal{N}(\mu) = \{A \in \mathcal{T} \mid \mu(A) = 0\}$ avem $B \subset A \in \mathcal{N}(\mu) \Rightarrow B \in \mathcal{N}(\mu)$. Vom mai presupune că μ este σ -finită (adică există o familie cel mult numărabilă $(A_n)_n \subset \mathcal{T}$ astfel încât $\bigcup_n A_n = T$ și $\mu(A_n) < \infty$, oricare ar fi n).

În particular, în cazul când $T = \mathbb{N}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ și $\mu(A) = \text{card}(A)$ (dacă A este finită) și $\mu(A) = \infty$ (dacă A este infinită), vom spune că μ este măsura de numărare.

Pentru funcția scalară $f: T \rightarrow K$, noțiunile de μ -măsurabilitate și μ -integrabilitate sunt cele clasice.

Fie $M(\mu) = \{f: T \rightarrow K \mid f \text{ este } \mu\text{-măsurabilă}\}$ care este spațiu vectorial. Un subspațiu vectorial al lui $M(\mu)$ este $N(\mu) = \{f: T \rightarrow K \mid f(t) = 0 \text{ } \mu\text{-apt}\}$ (adică $f(t) = 0$ μ -aproape peste tot $\Leftrightarrow \{t \in T \mid f(t) \neq 0\} \in \mathcal{N}(\mu)$).

Putem factoriza:

Introducem relația de echivalență pe $M(\mu)$: $f \sim g \Leftrightarrow f(t) = g(t)$ μ -apt (adică $\{t \in T \mid f(t) \neq g(t)\} \in \mathcal{N}(\mu)$).

Se vede că $f \sim g \Leftrightarrow f - g \in N(\mu)$.

Mulțimea cât a claselor de echivalență este $M(\mu)|_{N(\mu)} \stackrel{\text{def}}{=} L(\mu) = L$. Deci scriem $\tilde{f} \in L$ și $f \in \tilde{f}$ ($f \in M(\mu)$).

Notăm cu $M_+(\mu) = \{u: T \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \mid u \text{ este } \mu\text{-măsurabilă}\}$ (adică $\forall A \in \overline{\mathcal{R}}_+$, A boreliană, $u^{-1}(A) \in \mathcal{T}$).

Definiția 2.1. Se numește μ -normă funcțională sau, pe scurt normă funcțională o funcție $\rho: M_+(\mu) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ cu proprietățile:

- $\rho(u) = 0 \Leftrightarrow u(t) = 0$ μ -apt;
- $\rho(u+v) \leq \rho(u) + \rho(v)$ pentru orice u, v în $M_+(\mu)$ (ρ este subaditivă);
- $\rho(\alpha u) = \alpha \rho(u)$ pentru orice $\alpha \in [0, \infty)$ și orice $u \in M_+(\mu)$ (ρ este pozitiv omogenă); ($\alpha u \in M_+(\mu)$ se definește prin $(\alpha u)(t) = \alpha u(t)$ pentru orice $t \in T$ și folosim convenția $0u \stackrel{\text{def}}{=} 0$);
- Dacă $u \leq v$ în $M_+(\mu)$, avem $\rho(u) \leq \rho(v)$ (ρ este crescătoare).

Rezultă că: $u \sim v \Rightarrow \rho(u) = \rho(v)$.

Reținem implicația importantă ($\rho(u) < \infty \Rightarrow u(t) < \infty$ μ -apt).

Notăție: Pentru orice $A \in \mathcal{T}$, notăm $\rho(A) \stackrel{\text{def}}{=} \rho(\varphi_A)$. Prin urmare $\rho(T) > 0$.

Rezultă: $\rho(A \cup B) \leq \rho(A) + \rho(B)$, pentru orice A, B din $\mathcal{T}$.

Definiția 2.2. Fie ρ o normă funcțională.

1. Spunem că ρ are proprietatea Riesz-Fischer (și scriem ρ R-F) dacă pentru orice șir $(u_n)_n \subset M_+(\mu)$ cu $\sum_{n=1}^{\infty} \rho(u_n) < \infty$ avem $\rho(\sum_{n=1}^{\infty} u_n) < \infty$.
2. Spunem că ρ are proprietatea slabă a lui Fatou (și scriem ρ w F) dacă pentru orice șir crescător $(u_n)_n \subset M_+(\mu)$ cu $\sup_n \rho(u_n) < \infty$, avem $\rho(\sup_n u_n) < \infty$.
3. Spunem că ρ are proprietatea lui Fatou (și scriem ρ F) dacă pentru orice șir crescător $(u_n)_n \subset M_+(\mu)$ avem $\rho(\sup_n u_n) = \sup_n \rho(u_n)$.

Observație importantă. Se poate arăta (v. [8] sau [33]) că avem următoarea echivalență:

$$\rho \text{ R-F} \Leftrightarrow \text{Pentru orice șir } (u_n)_n \subset M_+(\mu) \text{ avem } \rho(\sum_{n=1}^{\infty} u_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \rho(u_n).$$

Teorema 2.3. $\rho \text{ F} \Rightarrow \rho \text{ w F} \Rightarrow \rho \text{ R-F}$.

Teorema 2.4. a) $\rho \text{ w F} \Leftrightarrow$ există un număr $k \geq 1$ (numit constanta lui Amemyia a lui ρ) cu proprietatea că pentru orice șir $(u_n)_n \subset M_+(\mu)$ avem

$$\rho(\liminf u_n) \leq k \liminf \rho(u_n)$$

b) $\rho \text{ F} \Leftrightarrow$ pentru orice șir $(u_n)_n \subset M_+(\mu)$ avem

$$\rho(\liminf u_n) \leq \liminf \rho(u_n)$$

(constantă lui Amemyia a lui ρ este egală cu 1)

Definiția 2.5. (Norma funcțională a lui Tomescu).

Fie ρ o normă funcțională. Definim $\rho_T: M_+(\mu) \rightarrow \mathbb{R}_+$ prin $\rho_T(u) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \rho(u_n) \mid u_n \in M_+(\mu), \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u\}$.

Teorema 2.6.

1. ρ_T este normă funcțională;
2. ρ_T R-F;
3. $\rho_T \leq \rho$;
4. $\rho = \rho_T \Leftrightarrow \rho$ R-F;
5. Dacă r este o normă funcțională cu proprietățile $r \leq \rho$ și r R-F atunci $\rho_T \geq r$ (adică ρ_T este cea mai mare normă funcțională cu proprietatea R-F care este mai mică decât ρ).

Un exemplu util este prezentat în cele ce urmează:

Dacă μ este măsura de numărare și $\rho: M_+(\mu) \rightarrow \mathbb{R}_+$ este definită prin $\rho(u) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^2}, & \text{dacă } \{n \in \mathbb{N} \mid u(n) \neq 0\} \text{ este finită} \\ \infty, & \text{dacă } \{n \in \mathbb{N} \mid u(n) \neq 0\} \text{ este infinită} \end{cases}$

avem $\rho_T(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^2}$, oricare ar fi $u \in M_+(\mu)$.

Definiția 2.7. Norma funcțională ρ se numește de tip absolut continuu (în scris ρ ac) dacă are următoarea proprietate: Pentru orice șir $(u_n)_n \subset M_+(\mu)$ descrescător cu $\lim_n u_n = \inf_n u_n = 0$ și astfel încât $\rho(u_1) < \infty$, avem $\lim_n \rho(u_n) = 0$.

Definiția 2.8. Dacă $(T, \mathcal{T}, \mu)$ este un spațiu cu măsură și $1 \leq p \leq \infty$, vom reaminti definițiile normelor funcționale $\|\cdot\|_p$.

- 1) Presupunem $1 \leq p < \infty$. Definim, pentru $u \in M_+(\mu)$:

$$\|u\|_p = \left(\int u^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$
- 2) Presupunem că $p = \infty$. Definim, pentru $u \in M_+(\mu)$:

$$\|u\|_{\infty} = \inf\{\sup u(t) \mid t \in T \setminus N\} \mid N \text{ este } \mu - \text{neglijabilă}\}$$

Se știe că: dacă $1 \leq p < \infty$, avem $\|\cdot\|_p$ F și $\|\cdot\|_p$ ac, iar dacă $p = \infty$, avem $\|\cdot\|_{\infty}$ F.

Observație: În general, $\|\cdot\|_\infty$ ac este falsă. De exemplu, dacă $T=[0,1]$, $\mathcal{T}$ =mulțimile măsurabile Lebesgue pe $[0,1]$ și μ este măsura Lebesgue pe $[0,1]$, putem lua șirul $(u_n)_n \subset M_+(\mu)$ dat prin $u_n = \varphi_{A_n}$, unde $A_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$. Atunci $u_n \downarrow 0$ și $\|u_n\|_\infty = 1$ pentru orice $n \geq 1$.

Discutând despre eventuala continuitate absolută a normei funcționale $\|\cdot\|_\infty$, reamintim că o mulțime $A \in \mathcal{T}$ se numește atom al lui μ dacă $0 < \mu(A) < \infty$ și pentru orice $\mathcal{T} \ni B \subset A$ avem: sau $\mu(B)=0$ sau $\mu(B)=\mu(A)$. Atunci, se arată că, dacă $\mu(T) < \infty$, avem echivalența: $\|\cdot\|_\infty$ este ac $\Leftrightarrow T$ este o reuniune finită de atomi.

Definiția 2.9 (norma lui Orlicz).

Se numește N-funcție o funcție $M: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ cu proprietățile: M este continuă, convexă și, în plus, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{M(t)}{t} = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = \infty$. O N-funcție se poate reprezenta sub forma $M(u) = \int_0^u p(t) dt$, unde $p: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o funcție crescătoare, continuă la dreapta, cu $p(0)=0$ și $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \infty$ și astfel încât $p(t) > 0$, oricare ar fi $t > 0$. Rezultă că M este strict crescătoare, bijectivă de la $\mathbb{R}_+$ la $\mathbb{R}_+$. Punem $q: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $q(s) = \sup\{t \geq 0 | p(t) \leq s\}$ și definim $N: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $N(v) = \int_0^v q(s) ds$. Observăm că q și p au aceleași proprietăți (q se numește inversa la dreapta a lui p), p este inversa la dreapta a lui q și N este o N-funcție.

Funcțiile M și N se numesc N-funcții complementare în sensul lui Young. Norma funcțională (norma lui Orlicz) este norma funcțională $\rho_M: M_+(\mu) \rightarrow \mathbb{R}_+$, definită prin

$$\rho_M(u) = \sup\{\int uv d\mu \mid v \in M_+(\mu) \text{ și } v \text{ este finită, } NN(v) \leq 1\},$$

unde $NN(v) = \int N(v) d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int N(v(x)) d\mu(x)$. Norma ρ_M este o normă funcțională cu proprietatea lui Fatou. Cu ajutorul lui ρ_M se construiesc spațiile Köthe asociate L_{ρ_M} , notate L_M și numite spații Orlicz. Ele sunt spații Banach (a se vedea construcția imediat următoare).

$$L_M = \{\tilde{f} \mid f: T \rightarrow \mathbb{C} \text{ măsurabilă și } \rho_M(|f|) < \infty\}$$

înzestrat cu norma $\tilde{f} \mapsto \|\tilde{f}\|_M = \rho_M(|f|)$. Aici $\tilde{f}$ este clasa de egalitate μ -apt a lui f .

În continuare, definim spațiile Köthe (scalare). Considerăm un spațiu cu măsură $(T, \mathcal{T}, \mu)$, o normă funcțională ρ pe $(T, \mathcal{T}, \mu)$ și notațiile anterioare. Pentru orice $f \in M(\mu)$ am introdus funcția $|f|: T \rightarrow \mathbb{R}_+$, definită prin $|f|(t) = |f(t)|$. Evident, $|f| \in M_+(\mu)$. Vom scrie $\rho|f|$ în loc de $\rho(|f|)$.

Notăm $\mathcal{L}_\rho(\mu) = \mathcal{L}_\rho = \{f \in M(\mu) \mid \rho|f| < \infty\}$ și numim pe $\mathcal{L}_\rho$ spațiu Köthe de funcții. Acest spațiu $\mathcal{L}_\rho$ este seminormat cu seminorma $f \mapsto \rho|f|$.

Spațiul nul al acestei seminorme este $N(\mu)$, adică

$$\{f \in \mathcal{L}_\rho \mid \rho|f| = 0\} = \{f: T \rightarrow K \mid f(t) = 0 \mu - \text{apt}\}.$$

Factorizăm și obținem:

$$L_\rho(\mu) = L_\rho = \mathcal{L}_\rho(\mu) \setminus N(\mu).$$

Spațiul L_ρ se numește spațiu Köthe. Elementele lui L_ρ sunt clase de echivalență pentru relația de echivalență (pe $\mathcal{L}_\rho$) dată prin

$$f \sim g \Leftrightarrow f(t) = g(t) \mu - \text{apt}.$$

Prin urmare, putem scrie $\mathcal{L}_\rho \ni f \in \tilde{f} \in L_\rho$.

Spațiul L_ρ devine spațiu normat cu ajutorul normei asociate seminormei descrise anterior:

$$\tilde{f} \mapsto \|\tilde{f}\| = \rho|f|$$

pentru orice reprezentant $f \in \tilde{f}$.

Teorema 2.10. L_ρ este Banach $\Leftrightarrow \rho$ R-F.

Vom demonstra această teoremă într-un cadru mai general (Teorema 3.3.1).

În cazul particular când $\rho = \|\cdot\|_p$ pentru un anumit $1 \leq p \leq \infty$, obținem spațiile Lebesgue clasice:

$$\mathcal{L}_\rho = \mathcal{L}^p(\mu) \text{ și } L_\rho = L^p(\mu).$$

În cazul când $\rho = \rho_M$, obținem spațiile Orlicz: $\mathcal{L}_{\rho_M}$ și L_{ρ_M} .

Alte cazuri particulare importante de spații Köthe sunt spațiile Lorentz și spațiile Marcinkiewicz.

Pentru noțiunile și rezultatele prezentate până acum, se pot consulta următoarele materiale:

- Pentru Topologie Generală: [24] și [29].
- Pentru Teoria măsurii și Integralei: [13], [15], [17], [33].
- Pentru Analiză Funcțională: [11], [16], [31].
- Pentru Teoria Spațiilor Köthe L_p : [8], [26], [27], [28], [33].

Capitolul 3. Spații Köthe-Bochner. Proprietăți fundamentale

3.1. Introducere

Istoria spațiilor Köthe-Bochner (variantea vectorială a spațiilor L_p) începe, desigur, cu clasicele spații Lebesgue L^p . Multe generalizări ale acestui spațiu au apărut ulterior, printre care bine-cunoscutele spații Orlicz. Matematicienii olandezi W.A.J. Luxemburg și A.C. Zaenen au studiat spațiile L_p într-o serie de articole (v. [6]). Rezultatele obținute de ei și de alți matematicieni s-au adunat în monografiile [8] și [33]. Se pare că numele de "spații Köthe" dat spațiilor L_p a fost sugerat de J. Dieudonné. Menționăm că definiția spațiilor L_p de aici nu este universală, alte definiții ușor modificate fiind în uz.

Următorul pas important este considerarea spațiilor Köthe-Bochner, care sunt generalizarea spațiilor Köthe L_p , înlocuind spațiul scalarilor K în definirea spațiilor L_p printr-un spațiu Banach nenul oarecare X .

3.2. Noțiuni preliminare

Fie X spațiu Banach.

Dualul lui X este $X' = \{F: X \rightarrow K \mid F \text{ este liniară și continuă}\}$. Se știe că X' devine spațiu Banach cu norma

$$\|F\|_0 = \sup\{|F(x)| \mid x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

Fie $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un spațiu cu măsură completă, și fie $\rho: M_+(\mu) \rightarrow \mathbb{R}_+$ o normă funcțională pe $(T, \mathcal{T}, \mu)$.

Notăm: $E_X(\mu)$ = funcțiile $\mathcal{T}$ -etajate cu valori în X , adică

$$E_X(\mu) = \{f: T \rightarrow X \mid f \text{ are forma } f = \sum_{i=1}^n \varphi_{A_i} x_i \text{ cu } A_i \in \mathcal{T} \text{ disjuncte și } x_i \in X\}$$

și $M_X(\mu)$ = funcțiile μ -măsurabile cu valori în X , adică

$M_X(\mu) = \{f: T \rightarrow X \mid f \text{ are proprietățile: a) Pentru orice mulțime boreliană } B \subset X, f^{-1}(B) \in \mathcal{T}, \text{ b) Pentru orice } A \in \mathcal{T} \text{ cu } \mu(A) < \infty \text{ există } \mathcal{T} \ni M \subset A \text{ cu } \mu(M) = 0 \text{ și există } H \subset X, H \text{ cel mult numărabilă așa ca } f(A \setminus M) \subset \overline{H}\}$.

Dacă $X = K$, scriem $E(\mu)$ în loc de $E_K(\mu)$ și (evident) $M(\mu)$ în loc de $M_K(\mu)$.

Propoziția 3.2.1. Fie $f: T \rightarrow X$. Atunci $f \in M_X(\mu) \Leftrightarrow (\exists) (f_n)_n \subset E_X(\mu), f_n \xrightarrow{n} f$ μ -apt (teorema lui B.J.Pettis)

Dacă $f \in M_X(\mu)$, atunci $|f| \in M_+(\mu)$, unde $|f|: T \rightarrow \mathbb{R}_+$ este definită prin $|f|(t) = \|f(t)\|$.

Introducem spațiile Köthe de funcții vectoriale.

Fie ρ o normă funcțională pe $(T, \mathcal{T}, \mu)$ și X un spațiu Banach. Definim

$$\mathcal{L}_X(\rho) = \{f \in M_X(\mu) \mid \rho|f| < \infty\}, \text{ unde } \rho|f| \stackrel{\text{def}}{=} \rho(|f|).$$

Atunci $\mathcal{L}_X(\rho)$ este seminormat cu seminorma $f \mapsto \rho(f) \stackrel{\text{def}}{=} \rho|f|$.

În cazul $\rho = \|\cdot\|_p, 1 \leq p \leq \infty$, avem $\mathcal{L}_X(\rho) = L^p(X) = L^p(X, \mu)$.

În cazul $\rho = \rho_M$, avem $\mathcal{L}_X(\rho) = \mathcal{L}_X(\rho_M)$, numit spațiu Orlicz de funcții vectoriale.

Spațiul normat asociat lui $\mathcal{L}_X(\rho)$ se obține factorizând $\mathcal{L}_X(\rho)$ prin relația de echivalență:

$$f \sim g \Leftrightarrow p(f-g)=0 \Leftrightarrow f=g \mu\text{-apt.}$$

Spațiul normat asociat este, de fapt, $\mathcal{L}_X(\rho)/\sim_{\mathcal{N}_X(\mu)}$ unde $\mathcal{N}_X(\mu) = \{f: T \rightarrow X \mid f = 0 \mu - \text{apt}\}$.

$$\text{Notăm } \mathcal{L}_X(\rho)/\sim = \mathcal{L}_X(\rho)/\mathcal{N}_X(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} L_X(\rho),$$

care este normat cu norma

$$\tilde{f} \mapsto \|\tilde{f}\| \stackrel{\text{def}}{=} p(f) = \rho|f|$$

pentru orice reprezentant $f \in \tilde{f}$.

În cazul $\rho = \|\cdot\|_p, 1 \leq p \leq \infty$, avem $L_X(\rho) = L^p(X) = L^p(X, \mu)$.

În cazul $\rho = \rho_M$, avem $L_X(\rho) = L_X(\rho_M)$, numit spațiu Orlicz vectorial.

Dacă $X=K$ scriem (cum am făcut deja) $\mathcal{L}_K(\rho) = \mathcal{L}(\rho) = L_\rho$ și $L_K(\rho) = L(\rho) = L_\rho$. Este cunoscut faptul că L_ρ este Banach dacă și numai dacă ρ este R-F. Acesta este cazul spațiului $L^p, 1 \leq p \leq \infty$ și spațiului Orlicz.

Pentru $X=\mathbb{R}$, spațiul L^p este spațiu normat reticulat (spațiu Riesz), cu ordinea canonică $\tilde{f} \leq \tilde{g} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(t) \leq g(t) \mu - \text{apt}$ pentru orice reprezentant $f \in \tilde{f}$ și $g \in \tilde{g}$.

Denumiri

Numim pe $\mathcal{L}_X(\rho)$ spațiu Köthe de funcții vectoriale. Numim pe $L_X(\rho)$ spațiu Köthe vectorial sau spațiu Köthe-Bochner (practic, folosim aceleași denumiri, atât pentru spațiul de funcții, cât și pentru spațiul de clase de echivalență atașat, dar credem că nu există posibilitate de confuzie, deoarece totul rezultă din context).

Este util să prezentăm un **exemplu de spațiu Köthe-Bochner**:

Considerăm spațiul cu măsură $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ cu măsura de numărare μ . Să luăm un număr $1 \leq p < \infty$ și spațiul Banach $X = l^p$ constând din șirurile de scalari $x = (x_n)_n$ cu proprietatea că $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$, normat cu norma $x \mapsto \|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$. Vom considera μ -norma funcțională $\rho: M_+(\mu) \rightarrow \mathbb{R}_+$, definită prin $\rho(u) = (\sum_{m=1}^{\infty} u(m)^p)^{\frac{1}{p}}$. Avem $\mathcal{L}_X(\rho) = L_X(\rho)$ (singura mulțime neglijabilă este $\emptyset$). Și anume, dacă $f \in \mathcal{L}_X(\rho)$, scriem, pentru orice m natural: $f(m) = (x_{mn})_n$, prin urmare $\|f(m)\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_{mn}|^p)^{\frac{1}{p}}$. Atunci $\|f\| = \rho|f| = (\sum \|f(m)\|_p^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |x_{mn}|^p)^{\frac{1}{p}}$ și $\mathcal{L}_X(\rho)$ constă în toate matricele infinite $(x_{mn})_{m,n}$ astfel încât $\sum_{m,n} |x_{mn}|^p < \infty$.

În contextul de mai sus se definește spațiul vectorial

$$E_X(\rho) = \{f \in E_X(\mu) \mid \rho|f| < \infty\}, \text{ adică } E_X(\rho) = E_X(\mu) \cap \mathcal{L}_X(\rho).$$

Se vede că, dacă $f = \sum_{i=1}^n \varphi_{A_i} x_i \in E_X(\rho)$ (cu A_i disjuncte), atunci $\rho(A_i) < \infty, i=1,2,\dots,n$ (și reciproc).

Atunci putem defini

$$\widetilde{E}_X(\rho) = \{\tilde{f} \mid f \in E_X(\mu)\} \subset L_X(\rho),$$

adică $\widetilde{E}_X(\rho) = \pi_X(E_X(\rho))$, unde $\pi_X: \mathcal{L}_X(\rho) \rightarrow L_X(\rho)$ este aplicația canonică dată prin formula $\pi_X(f) = \tilde{f}$.

În cazul când $X = K$, scriem $\widetilde{E}(\rho)$ în loc de $\widetilde{E}_K(\rho)$.

Propoziția 3.2.2. Fie $f \in M_X(\mu)$. Atunci există un șir $(f_n)_n \subset E_X(\mu)$ astfel încât $|f_n| \leq |f|$ pentru orice n și $f_n \rightarrow f$ μ -apt (v. [15]).

Din această propoziție rezultă (v. [8])

Teorema 3.2.3. Se presupune că ρ R-F și ρ ac. Atunci $\widetilde{E}_X(\rho)$ este dens în $L_X(\rho)$.

Monografia standard dedicată spațiilor Köthe-Bochner este [24]. Menționăm că teoria prezentată în [24] este puțin mai particulară decât teoria din prezenta teză, deoarece în [24] se presupune că funcțiile caracteristice ale mulțimilor de măsură finită sunt în L_ρ .

3.3. Rezultate.

3.3.1. Completitudinea. Funcții ale căror mulțimi de valori sunt incluse în subspații închise.

Lema 3.3.1.1. Spațiul L_p este Banach dacă și numai dacă pentru orice șir Cauchy $(\tilde{u}_n)_n \subset L_p$ astfel încât $\tilde{u}_n \geq 0$, pentru orice n , există $\tilde{u} \in L_p$ astfel încât $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}$ în L_p .

Lema 3.3.1.2. Presupunem $\rho \in R - F$. Fie $(\tilde{f}_n)_n \subset L_X(\rho)$ un șir astfel încât $\sum_{n=1}^{\infty} \rho |f_n| < \infty$. Atunci:

1. Avem convergență μ -apt, adică există $A \in \mathcal{T}$ cu $\mu(A)=0$ astfel încât seria $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(t)\|$ converge pentru orice $t \in T \setminus A$.
2. Definim $f: T \rightarrow X$ prin $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ oricare ar fi $t \in T \setminus A$ și $f(t) = \text{arbitrar}$ în X dacă $t \in A$. Atunci avem $f \in L_X(\rho)$ și, pentru orice n natural,

$$\rho |f - \sum_{k=1}^n f_k| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \rho |f_k| \rightarrow 0.$$

Teorema 3.3.1.3. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $\rho \in R - F$;
2. Pentru orice spațiu Banach X , $L_X(\rho)$ este complet, adică $L_X(\rho)$ este Banach (în particular, L_p este Banach);
3. Există un spațiu Banach X nenul astfel încât $L_X(\rho)$ este complet, adică $L_X(\rho)$ este Banach.

Remarcă. Mai târziu, vom da exemplul 3.3.2.11 care va arăta că, în cazul când condiția $\rho \in R - F$ este încălcată, este posibil ca spațiul $L_X(\rho)$ să nu fie complet.

Vom continua introducând câteva considerații în ceea ce privește măsurabilitatea.

Fie X un spațiu Banach și fie $Y \subset X$ un subspațiu vectorial închis. Scriem $\mathcal{F}(T, X) = \{f: T \rightarrow X\}$ și $\mathcal{F}(T, Y) = \{f: T \rightarrow Y\}$ și putem defini $H(X, Y): \mathcal{F}(T, Y) \rightarrow \mathcal{F}(T, X)$ prin $H(X, Y)(f) = F$, unde $F(t) = f(t)$ pentru orice $t \in T$ (H este liniară și injectivă).

Lema 3.3.1.4.

Avem egalitatea

$$H(X, Y)(M_Y(\mu)) = \{f \in M_X(\mu) | f(T) \subset Y\}$$

Corolar 3.3.1.5.

Avem $H(X, Y)(L_Y(\rho)) = \{f \in L_X(\rho) | f(T) \subset Y\}$.

Deci, obținem o izometrie $P(X, Y): L_Y(\rho) \rightarrow L_X(\rho)$, $P(X, Y)(\tilde{f}) = \tilde{F}$, unde $F = H(X, Y)(f)$. Aici, pe $L_Y(\rho)$, considerăm norma indusă pe $L_X(\rho)$.

În ceea ce urmează considerăm un caz special de subspațiu Y al lui X , unde X este spațiu Banach nenul. Fie un element $0 \neq x \in X$ și luăm $Y = \text{Sp}(x) = \{\alpha x | \alpha \in K\}$ subspațiul generat de x . Pentru acest Y definim spațiul

$$L_\rho(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in L_X(\rho) | f(T) \subset \text{Sp}(x)\},$$

$$L_\rho(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{\tilde{f} \in L_X(\rho) | f \in L_\rho(x)\}.$$

În același timp, definim spațiile $L_\rho x \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi x | \varphi \in L_\rho\}$ și $L_\rho x \stackrel{\text{def}}{=} \{\tilde{f} | f \in L_\rho x\}$.

Evident, $L_\rho x \subset L_\rho(x)$ și $L_\rho x \subset L_\rho(x)$.

Teorema 3.3.1.6. Pentru orice $x \in X$, avem $L_\rho(x) = L_\rho x$ și $L_\rho(x) = L_\rho x$.

Folosind acest rezultat, putem completa Teorema 3.3.1.3 cu următoarea:

Teorema 3.3.1.7. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- 1) $\rho \in R - F$;
- 2) Există un spațiu Banach nenul X și $0 \neq x \in X$ astfel încât $L_\rho(x) = L_\rho x$ este Banach;
- 3) Există un spațiu Banach nenul X și un subspațiu vectorial nenul închis $Y \subset X$ astfel încât $L_Y(\rho)$ este Banach.

Cu teoremele 3.3.1.3 și 3.3.1.7 obținem următoarea teoremă de sinteză

Teorema 3.3.1.8. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. ρ R-F;
2. L_ρ este Banach;
3. Pentru orice spațiu Banach X , spațiul $L_X(\rho)$ este Banach;
4. Există un spațiu Banach X nenul astfel încât $L_X(\rho)$ este Banach;
5. Există un spațiu Banach nenul X și $0 \neq x \in X$ astfel încât $L_\rho(x) = L_\rho x$ este Banach;
6. Există un spațiu Banach nenul X și un subspațiu vectorial nenul închis $Y \subset X$ astfel încât $L_Y(\rho)$ este Banach.

Remarcă. Putem citi echivalența 1. $\Leftrightarrow$ 3. din Teorema 3.3.1.8 după cum urmează: L_ρ are proprietatea (C) dacă și numai dacă $L_X(\rho)$ are proprietatea (C) pentru orice spațiu Banach X (aici (C) înseamnă completitudinea). Acest tip de echivalență nu este valid întotdeauna.

De exemplu, vom considera drept proprietate (C) reflexivitatea. Este adevărată implicația $L_X(\rho)$ este reflexiv pentru orice spațiu Banach $X \Rightarrow L_\rho$ este reflexiv (deoarece luăm $X=K$). Implicația inversă nu este în general adevărată, ceea ce se vede după cum urmează. Presupunem că $0 < \rho(T) < \infty$ și X nu este spațiu Banach reflexiv. Acceptăm că L_ρ este reflexiv. Vom vedea că $L_X(\rho)$ nu este reflexiv. Într-adevăr, luăm izometria liniară $H: X \rightarrow L_X(\rho)$, dată prin $H(x) = \frac{1}{\rho(T)} \widetilde{\varphi_T x}$. Atunci $H(X)$ este subspațiu închis în $L_X(\rho)$. Dacă $L_X(\rho)$ va fi reflexiv, va rezulta că $H(X)$ (și X) va fi reflexiv (fals).

Remarcă: De multe ori, are loc echivalența:

$L_X(\rho)$ are proprietatea (C) $\Leftrightarrow L_\rho$ și X au proprietatea (C). Un exemplu în acest sens este dat de Teorema 4.1.11.

3.3.2. Topologia convergenței în ρ -măsură. Relația cu topologia canonică.

Fie $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un spațiu cu măsură, ρ o μ -normă funcțională și X un spațiu Banach.

Definiția 3.3.2.1. O funcție $\varphi: [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ se numește S-funcție dacă îndeplinește următoarele proprietăți:

- (i) Există $0 < a < \infty$ astfel încât $\varphi([0, \infty]) = [0, a]$ și φ este strict crescătoare.
- (ii) $\varphi(s+t) \leq \varphi(s) + \varphi(t)$, $(\forall) s, t \in [0, \infty]$.

Funcția $\varphi: [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$, dată prin $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$, dacă $0 \leq t < \infty$ și $\varphi(\infty) = 1$ este o S-funcție ($a=1$).

Orice S-funcție φ și "inversa" sa (definită pe $[0, a]$) φ^{-1} sunt continue.

Pentru orice $0 < a < \infty$ și orice $f \in M_X(\mu)$, definim:

$$(|f| > a) \stackrel{\text{def}}{=} \{t \in T \mid |f|(t) > a\} \text{ și } \rho(|f| > a) \stackrel{\text{def}}{=} \rho((|f| > a))$$

$$(|f| \geq a) \stackrel{\text{def}}{=} \{t \in T \mid |f|(t) \geq a\} \text{ și } \rho(|f| \geq a) \stackrel{\text{def}}{=} \rho((|f| \geq a))$$

$$(a, f) = a + \rho(|f| > a).$$

Pentru orice S-funcție φ și orice $0 < a < \infty$, scriem $\varphi(a, f) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi((a, f))$ și definim

$$\|f\|_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{\varphi(a, f) \mid a > 0\} < \infty.$$

Lema 3.3.2.2. Pentru orice S-funcție φ și orice $f, g \in M_X(\mu)$:

1. $\|0\|_\varphi = 0$;
2. $\|f\|_\varphi = \|-f\|_\varphi$;
3. $\|f + g\|_\varphi \leq \|f\|_\varphi + \|g\|_\varphi$.

Teorema 3.3.2.3. I. Considerăm un șir generalizat $(f_\delta)_{\delta \in \Delta} \subset M_X(\mu)$, $f \in M_X(\mu)$ și o S-funcție. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $f_\delta \xrightarrow{\delta} f$ în τ_φ .

2. $\rho(|f - f_\delta| > a) \xrightarrow{\delta} 0$ pentru orice $0 < a < \infty$;
3. $\rho(|f_\delta - f| \geq a) \xrightarrow{\delta} 0$ pentru orice $0 < a < \infty$.

II. Avem $\tau_{\varphi_1} = \tau_{\varphi_2}$ pentru orice două S-funcții φ_1 și φ_2 .

Rezultatul teoremei 3.3.2.3, II. poate fi interpretat după cum urmează: toate funcțiile φ generează o unică topologie $\tau = \tau_\varphi$ de grup abelian semimetrizabil pe $M_X(\mu)$. Notăm $\tau = \tau_\varphi$ pentru orice S-funcție φ . Deoarece τ depinde de ρ , vom scrie $\tau_m(\rho)$ în loc de τ .

Definiția 3.3.2.4. Vom numi $\tau_m(\rho)$ topologia convergenței în ρ -măsură.

Când $f_\delta \xrightarrow{\delta} f$ în $(M_X(\mu), \tau_m(\rho))$, vom spune că $(f_\delta)_\delta$ converge la f în ρ -măsură și vom scrie $f_\delta \xrightarrow[\delta]{\rho} f$ (în particular $f_n \xrightarrow[n]{\rho} f$ în cazul șirurilor).

În general, grupul topologic semimetrizabil $(M_X(\mu), \tau_m(\rho))$ nu este separat. Mai precis, avem următorul rezultat:

Teorema 3.3.2.5. Închiderea lui $\{0\}$ în $(M_X(\mu), \tau_m(\rho))$ este spațiul vectorial $\mathcal{N}_X(\mu) = \{f: T \rightarrow X | f(t) = 0 \mu - \text{apt}\}$.

În general, $(M_X(\mu), \tau_m(\rho))$ nu este spațiu vectorial topologic, după cum rezultă din exemplul următor.

Exemplul 3.3.2.6. Luăm $(T, \mathcal{T}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, unde μ este măsura de numărare (toate funcțiile sunt μ -măsurabile). Vom lucra cu $X = \mathbb{K}$. Definim norma funcțională $\rho: M_+(\mu) \rightarrow \mathbb{R}_+$ prin $\rho(u) = \sup\{u(n) | n \in \mathbb{N}\}$.

Considerăm funcția $f \in M(\mu)$ dată prin $f(n) = n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Urmează că $\left(\left|\frac{1}{n}f\right| > 1\right) = \{n+1, n+2, \dots\}$, prin urmare $\rho\left(\left|\frac{1}{n}f\right| > 1\right) = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Rezultă că, șirul $\left(\frac{1}{n}f\right)_n$ nu converge la 0. $\square$

În scopul de a studia structura de spațiu vectorial topologic a lui $(M_X(\mu), \tau_m(\rho))$, vom introduce spațiul vectorial

$$M_{\max} = \left\{f \in M_X(\mu) \mid \rho(|f| > n) \rightarrow 0\right\}. \text{ Aici } n \in \mathbb{N}.$$

Faptul că $M_{\max}$ este spațiu vectorial rezultă din $(|f| + |g| > n) \subset \left(|f| > \frac{n}{2}\right) \cup \left(|g| > \frac{n}{2}\right)$.

Observăm că

$$M_{\max} = \left\{f \in M_X(\mu) \mid \rho(|f| > a) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0\right\}, \text{ unde } a > 0.$$

Teorema 3.3.2.7. 1. Grupul topologic $(M_X(\mu), \tau_m(\rho))$ are proprietatea că, pentru orice $a \in \mathbb{K}$ și orice subspațiu vectorial $M \subset M_X(\mu)$, funcția $T_a: M \rightarrow M$, $T_a(f) = af$, este continuă.

2. Subspațiul vectorial $M_{\max}$, echipat cu topologia indusă de $\tau_m(\rho)$, este un subspațiu vectorial topologic. Dacă $M \subset M_X(\mu)$ este subspațiu vectorial, atunci M echipat cu topologia indusă de τ_m este un subspațiu vectorial topologic dacă și numai dacă $M \subset M_{\max}$.

Remarci:

1. În exemplul 3.3.2.6, avem $f \notin M_{\max}$.
2. Considerând spațiul măsurabil $(T, \mathcal{T}, \mu)$ cu $\mu(T) < \infty$, un spațiu Banach arbitrar X și norma funcțională $\rho = \|\cdot\|_1$, $\rho(u) = \int u d\mu$, $u \in M_+(\mu)$, avem $M_{\max} = M_X(\mu)$, deoarece $\bigcap_{n=1}^{\infty} (|f| > n) = \emptyset$ pentru orice $f \in M_X(\mu)$, deci $\mu(|f| > n) = \rho(|f| > n) \rightarrow 0$. Așadar, $M_X(\mu)$ cu topologia (uzuală) a convergenței în măsură este spațiu vectorial topologic.

În general, grupul topologic semimetrizabil $(M_X(\mu), \tau_m(\rho))$ nu este complet, așa cum arată exemplul următor.

Exemplul 3.3.2.8. Luăm $(T, \mathcal{T}, \mu)$, unde $T = \mathbb{N}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu =$ măsură de numărare, $X = \mathbb{K}$ și norma funcțională $\rho: M_+(\mu) \rightarrow \mathbb{R}_+$ dată prin

$$\rho(u) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^2} & \text{dacă } \{n \in \mathbb{N} | u(n) \neq 0\} \text{ este finită} \\ \infty & \text{dacă } \{n \in \mathbb{N} | u(n) \neq 0\} \text{ este infinită} \end{cases}$$

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ scriem $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ și luăm șirul $(f_n)_n \subset M(\mu)$, dat prin $f_n = \chi_{A_n}$. Dacă $m > n$ avem $f_m - f_n = \chi_{\{n+1, n+2, \dots, m\}}$, deci $\rho(|f_m - f_n| > a) \leq \sum_{i=n+1}^m \frac{1}{i^2}$ și $\|f_m - f_n\|_\rho \leq \varphi\left(a + \sum_{i=n+1}^m \frac{1}{i^2}\right)$ pentru orice $a > 0$, deci $\|f_m - f_n\|_\rho \leq \varphi\left(\sum_{i=n+1}^m \frac{1}{i^2}\right)$.

Șirul $(f_n)_n$ este Cauchy (aici φ este o S-funcție arbitrară) deoarece φ este continuă în 0.

Nu putem găsi nicio $f \in M(\mu)$ astfel încât $f_n - \frac{\rho}{n} \rightarrow f$.

Remarcă. Incompletitudinea din acest exemplu este din cauza faptului că ρ nu este Riesz-Fischer. (Teorema 3.3.3.11).

Vom trece la studiul relației între topologia $\tau(\rho)$ a spațiului Köthe-Bochner $\mathcal{L}_X(\rho)$ și topologia $\tau_m^i(\rho)$ indusă pe $\mathcal{L}_X(\rho)$ de topologia $\tau_m(\rho)$ (adică $\tau_m^i(\rho) = \tau_m(\rho) / \mathcal{L}_X(\rho)$).

Primul rezultat este:

Teorema 3.3.2.9. Avem $\mathcal{L}_X(\rho) \subset M_{max}$. Deci, $\mathcal{L}_X(\rho)$ cu topologia $\tau_m^i(\rho)$ este un spațiu vectorial topologic.

Rezultatul precedent spune că pe spațiul vectorial $\mathcal{L}_X(\rho)$ avem două topologii liniare: $\tau(\rho)$ = topologia spațiului Köthe-Bochner și $\tau_m^i(\rho)$ = topologia convergenței în ρ -măsură.

Relația dintre aceste topologii este dată de :

Teorema 3.3.2.10. Avem $\tau_m^i(\rho) \subset \tau(\rho)$, adică topologia convergenței în ρ -măsură este mai slabă decât topologia spațiului Köthe-Bochner.

Remarcă. În general, topologia $\tau(\rho)$ a spațiului Köthe-Bochner este strict mai fină decât topologia $\tau_m^i(\rho)$ a convergenței în măsură pe $\mathcal{L}_X(\rho)$. (Remarca 1 din Exemplul 3.3.3.19 din paragraful următor).

Exemplul 3.3.2.11. Considerăm din nou scenariul din Exemplul 3.3.2.8. Șirul $(f_n)_n$ este Cauchy în topologia Köthe-Bochner pe $\mathcal{L}_\rho$. Într-adevăr, dacă $m > n$, avem $\rho|f_m - f_n| = \sum_{i=n+1}^m \frac{1}{i^2} \frac{1}{m,n} \rightarrow 0$. Nu există $f \in \mathcal{L}_\rho$ astfel încât $f_n \rightarrow f$ în topologia Köthe-Bochner. Într-adevăr, pentru un astfel de f vom avea $f_n - \frac{\rho}{n} \rightarrow f$ (în vederea teoremei 3.3.2.10) ceea ce nu este posibil, după cum am văzut în Exemplul 3.3.2.8. Atunci $\mathcal{L}_\rho$ și $\mathcal{L}_\rho$ nu sunt complete (datorită faptului că ρ nu are proprietatea Riesz-Fischer). $\square$

Remarcă. De fapt, proprietatea Riesz-Fischer a lui ρ este o condiție necesară și suficientă pentru completitudinea lui $\mathcal{L}_X(\rho)$.

Închiderile spațiilor nule ale spațiilor vectoriale topologice $(\mathcal{L}_X(\rho), \tau(\rho))$ și $(\mathcal{L}_X(\rho), \tau_m^i(\rho))$ sunt egale, și anume

$$\overline{\{0\}} = \mathcal{N}_X(\mu) = \{f: T \rightarrow X | f(t) = 0 \text{ } \mu - \text{apt}\}.$$

(Închiderile în ambele topologii). Putem considera $L_X(\rho) = \mathcal{L}_X(\rho) / \mathcal{N}_X(\mu)$ cu cele două topologii.

Presupunem ρ R-F. Am văzut că spațiul vectorial seminormat $(\mathcal{L}_X(\rho), \tau(\rho))$ este complet, deci spațiul normat $(L_X(\rho), \|\cdot\|)$, adică spațiul Köthe-Bochner este Banach. Pe de altă parte, putem considera spațiul vectorial topologic semimetrizabil $(\mathcal{L}_X(\rho), \tau_m^i(\rho))$ (vezi Teorema 3.3.2.9) a cărui topologie $\tau_m^i(\rho)$ este mai slabă decât topologia $\tau(\rho)$ (vezi Teorema 3.3.2.10). Spațiul $L_X(\rho) = \mathcal{L}_X(\rho) / \mathcal{N}_X(\mu)$, echipat cu $q\tau_m^i(\rho)$ = topologia cântă la $\tau_m^i(\rho)$, este un spațiu vectorial metrizabil, topologia fiind mai slabă decât topologia Köthe-Bochner. Vom vedea (Teorema 3.3.3.11) că spațiul semimetrizabil $(M_X(\mu), \tau_m(\rho))$ este complet. În același timp, spațiile $(L_X(\rho), \tau_m^i(\rho))$ și $(L_X(\rho), q\tau_m^i(\rho))$ nu sunt complete, deoarece $\mathcal{L}_X(\rho)$ nu este închis în $M_X(\mu)$, folosind Exemplul 3.3.3.20.

3.3.3. Convergența șirurilor

În acest paragraf vom studia următoarele tipuri de convergențe pentru șirurile de funcții vectoriale măsurabile: μ -apt convergența, convergența în topologia spațiului Köthe-Bochner, convergența în ρ -măsură și ρ -aproape uniform convergența.

Fie $(T, \mathcal{T}, \mu)$ spațiu cu măsură, X spațiu Banach și $\rho: M_+(\mu) \rightarrow \mathbb{R}_+$ o normă funcțională.

Multe dintre faptele prezentate aici sunt generalizări ale faptelor corespunzătoare din teoria măsurii obișnuită. Cititorul este invitat să compare cu cazul particular al normei funcționale $\rho(u) = \|u\|_1$.

Înainte de a trece mai departe, observăm următoarele fapte pe care le vom folosi în acest paragraf:

- a) Dacă A, A_1 sunt în $\mathcal{T}$ și $\mu(A \setminus A_1) = 0$, avem $\rho(A) = \rho(A \cap A_1)$.
- b) Dacă $A_1, A_2, \dots, A_n$ sunt în $\mathcal{T}$, avem $\rho(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n \rho(A_i)$.
- c) Dacă $(A_n)_n \subset \mathcal{T}$ este un șir și ρ R-F, avem $\rho(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \rho(A_n)$.

Definiția 3.3.3.1. Considerăm șirul $(f_n)_n \subset M_X(\mu)$ și $f \in M_X(\mu)$.

Spunem că $(f_n)_n$ converge la f în ρ -măsură (adică, $f_n \xrightarrow[\rho]{\rho} f$) dacă $\rho(|f_n - f| > a) \xrightarrow{n} 0$ pentru orice $0 < a < \infty$. A se compara cu Teorema 3.3.1.3 și Definiția 3.3.2.4.

În plus:

a) Vom spune că șirul $(f_n)_n \subset M_X(\mu)$ este convergent în ρ -măsură dacă există $f \in M_X(\mu)$ astfel încât $f_n \xrightarrow[\rho]{\rho} f$.

b) Vom spune că șirul $(f_n)_n$ este Cauchy în ρ -măsură dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice $a > 0$ există $n(\varepsilon)$ astfel încât, pentru orice $m \geq n(\varepsilon)$, $n \geq n(\varepsilon)$, avem $\rho(|f_m - f_n| > a) < \varepsilon$.

Propoziția 3.3.3.2. Dacă $(f_n)_n$ este convergent în ρ -măsură, rezultă că $(f_n)_n$ este Cauchy în ρ -măsură.

Reciproca acestei propoziții este adevărată în cazul ρ R-F, așa cum vom vedea în Teorema 3.3.3.11.

Propoziția 3.3.3.3. 1. Presupunem $f_n \xrightarrow[\rho]{\rho} f$ și $f = g$ μ -apt. Atunci $f_n \xrightarrow[\rho]{\rho} g$.

2. Dacă $f_n \xrightarrow[\rho]{\rho} f$ și $f_n \xrightarrow[\rho]{\rho} g$, atunci $f = g$ μ -apt.

Am văzut că, în cazul f_n și $f \in \mathcal{L}_X(\rho)$, avem implicația $f_n \xrightarrow{n} f$ în $\mathcal{L}_X(\rho) \Rightarrow f_n \xrightarrow[\rho]{\rho} f$. Folosind Propoziția 3.3.3.3(2) obținem:

Propoziția 3.3.3.4. Presupunem $f_n \xrightarrow{n} f$ și $f_n \xrightarrow{n} g$ în topologia Köthe-Bochner a lui $\mathcal{L}_X(\rho)$. Atunci $f = g$ μ -apt.

Vom introduce acum o nouă convergență pentru șirurile din $M_X(\mu)$. Spre deosebire de convergențele anterioare (convergența în ρ -măsură și convergența în $\mathcal{L}_X(\rho)$) acest nou tip de convergență (care generalizează convergența asimptotică) nu este în general convergență topologică (adică într-o anumită topologie).

Definiția 3.3.3.5.

1. Fie $(f_n)_n \subset M_X(\mu)$ și $f \in M_X(\mu)$.

Spunem că $(f_n)_n$ converge către f ρ -aproape uniform (sau $(f_n)_n$ converge ρ -asimptotic la f) și scriem $f_n \xrightarrow[\rho]{\rho u} f$ dacă:

pentru orice $\varepsilon > 0$, există $A_\varepsilon \in \mathfrak{I}$ cu $\rho(A_\varepsilon) < \varepsilon$ și astfel încât $(f_n)_n$ converge uniform către f pe $T \setminus A_\varepsilon$ ($\forall \delta > 0, \exists n(\delta), \forall n \geq n(\delta), \forall t \in T \setminus A_\varepsilon, \|f_n(t) - f(t)\| < \delta$).

2. Fie $(f_n)_n \subset M_X(\mu)$.

Spunem că $(f_n)_n$ este ρ -aproape uniform Cauchy (sau $(f_n)_n$ este ρ -asimptotic Cauchy) dacă: pentru orice $\varepsilon > 0$, există $A_\varepsilon \in \mathfrak{I}$ cu $\rho(A_\varepsilon) < \varepsilon$ și astfel încât $(f_n)_n$ este Cauchy uniform pe $T \setminus A_\varepsilon$, adică: pentru orice $\delta > 0$, există $n(\delta) \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $m, n \geq n(\delta) \Rightarrow \|f_m(t) - f_n(t)\| < \delta$ pentru orice $t \in T \setminus A_\varepsilon$.

3. Vom spune că $(f_n)_n$ este ρ -aproape uniform convergent (sau $(f_n)_n$ este ρ -asimptotic convergent) dacă există $f \in M_X(\mu)$ astfel încât $f_n \xrightarrow[n]{\rho u} f$.

Propoziția 3.3.3.6. (Completitudinea ρ -aproape uniform convergenței). Șirul $(f_n)_n \subset M_X(\mu)$ este ρ -aproape uniform convergent dacă și numai dacă el este ρ -aproape uniform Cauchy.

Vom vedea că ρ -aproape uniform convergența implică μ -apt convergența și convergența în ρ -măsură (nu există nicio legătură între ρ -aproape uniform convergență și convergența în topologia spațiului Köthe-Bochner, ca în Exemplul 3.3.3.19).

Propoziția 3.3.3.7. Dacă șirul $(f_n)_n \subset M_X(\mu)$ și $f \in M_X(\mu)$ sunt astfel încât $f_n \xrightarrow[n]{\rho u} f$, atunci $f_n \xrightarrow[n]{\rho} f$ μ -apt și $f_n \xrightarrow[n]{\rho} f$.

Remarcă. Inversele implicațiilor din Propoziția 3.3.3.7, în general, nu sunt adevărate. Implicația $(f_n \xrightarrow[n]{\rho} f \text{ } \mu\text{-apt}) \Rightarrow (f_n \xrightarrow[n]{\rho u} f)$ în general nu este adevărată. Într-adevăr, în exemplele 3.3.2.8 și 3.3.2.11 șirul $(f_n)_n$ converge peste tot la funcția constantă egală cu 1, dar nu converge ρ -aproape uniform, deoarece aici ρ -aproape uniform convergența înseamnă uniform convergență. Implicația $(f_n \xrightarrow[n]{\rho} f) \Rightarrow (f_n \xrightarrow[n]{\rho u} f)$ în general nu este adevărată după cum vom vedea în remarcă 3.a) din exemplul 3.3.3.19.

Corolar 3.3.3.8. Fie un șir $(f_n)_n \subset M_X(\mu)$ și $f \in M_X(\mu)$.

1. Dacă $f_n \xrightarrow[n]{\rho u} f$ și $f=g$ μ -apt, atunci $f_n \xrightarrow[n]{\rho u} g$.
2. Dacă $f_n \xrightarrow[n]{\rho u} f$ și $f_n \xrightarrow[n]{\rho u} g$, atunci $f=g$ μ -apt.

Corolar 3.3.3.9. Fie un șir $(f_n)_n \subset M_X(\mu)$ și $f \in M_X(\mu)$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $f_n \xrightarrow[n]{\rho u} f$;
2. $(f_n)_n$ este ρ -aproape uniform Cauchy și $f_n \xrightarrow[n]{\rho} f$ μ -apt.

Următorul rezultat este foarte important.

Teorema 3.3.3.10. Se presupune că ρ R-F.

Fie $(f_n)_n \subset M_X(\mu)$ un șir Cauchy în ρ -măsură. Atunci, există un subșir $(f_{n_k})_k \subset (f_n)_n$ și o funcție $f \in M_X(\mu)$ cu proprietatea că $f_{n_k} \xrightarrow[k]{\rho u} f$ (deci $f_{n_k} \xrightarrow[k]{\rho} f$ μ -apt și $f_{n_k} \xrightarrow[k]{\rho} f$).

Următoarea consecință este completitudinea spațiului semimetrizabil $(M_X(\mu), \tau_m(\rho))$ în cazul ρ R-F.

Teorema 3.3.3.11. (Analoaga teoremei lui Slutsky)

Se presupune ρ R-F. Atunci spațiul semimetrizabil $(M_X(\mu), \tau_m(\rho))$ este complet (adică, un șir $(f_n)_n$ de funcții din $M_X(\mu)$ este Cauchy în ρ -măsură dacă și numai dacă $(f_n)_n$ este convergent în ρ -măsură, ceea ce înseamnă că există $f \in M_X(\mu)$, $f_n \xrightarrow{\rho} f$).

Folosind funcția ρ_T va fi posibil să obținem, conform Teoremei 3.3.3.10, rezultate aferente funcției ρ neavând proprietatea Riesz-Fischer.

Corolar 3.3.3.12. Pentru orice șir $(f_n)_n$ de funcții din $M_X(\mu)$ care este Cauchy în ρ -măsură, putem găsi $f \in M_X(\mu)$ și un subșir $(f_{n_k})_k \subset (f_n)_n$ astfel încât $f_{n_k} \xrightarrow{\rho} f$ μ -apt.

Propoziția 3.3.3.13. Presupunem ρ R-F. Fie șirul $(f_n)_n \subset M_X(\mu)$ și $f \in M_X(\mu)$.

1. Dacă $f_n \xrightarrow{\rho} f$, există un subșir $(f_{n_k})_k \subset (f_n)_n$ astfel încât $f_{n_k} \xrightarrow{\rho} f$ (deci $f_{n_k} \xrightarrow{\rho} f$ μ -apt).
2. Presupunem că $(f_n)_n \subset \mathcal{L}_X(\rho)$, $f \in \mathcal{L}_X(\rho)$ și $f_n \xrightarrow{\rho} f$ în topologia spațiului Köthe-Bochner al lui $\mathcal{L}_X(\rho)$. Atunci există un subșir $(f_{n_k})_k \subset (f_n)_n$ astfel încât $f_{n_k} \xrightarrow{\rho} f$ (deci $f_{n_k} \xrightarrow{\rho} f$ μ -apt și $f_{n_k} \xrightarrow{\rho} f$).

Corolar 3.3.3.14. Fie $(f_n)_n \subset M_X(\mu)$ un șir și $f \in M_X(\mu)$.

1. Dacă $f_n \xrightarrow{\rho} f$, există un subșir $(f_{n_k})_k \subset (f_n)_n$ astfel încât $f_{n_k} \xrightarrow{\rho} f$ μ -apt.
2. Presupunem că $(f_n)_n \subset \mathcal{L}_X(\rho)$, $f \in \mathcal{L}_X(\rho)$ și $f_n \xrightarrow{\rho} f$ în topologia spațiului Köthe-Bochner $\mathcal{L}_X(\rho)$. Atunci există un subșir $(f_{n_k})_k \subset (f_n)_n$ astfel încât $f_{n_k} \xrightarrow{\rho} f$ μ -apt.
3. Pentru orice subspațiu vectorial închis nenul $Y \subset X$, $\mathcal{L}_Y(\rho)$ este închis în $\mathcal{L}_X(\rho)$ și $L_Y(\rho)$ este închis în $L_X(\rho)$ (a se vedea Corolarul 3.3.1.5).

În cele ce urmează, vom prezenta o analogă a teoremei lui Egorov. Sunt necesare astfel unele noțiuni preliminare. Începem cu reamintirea unei noțiuni.

Definiția 3.3.3.15. Norma funcțională ρ este *de tip absolut continuu* (ρ ac) dacă pentru orice $u \in M_+(\mu)$ cu $\rho(u) < \infty$ și orice șir descrescător $(u_n)_n \subset M_+(\mu)$ astfel încât $u_n \leq u$ pentru orice n și $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = 0$ μ -apt avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n) = 0$.

Lema 3.3.3.16. Presupunem ρ de tip absolut continuu. Atunci pentru orice $u \in M_+(\mu)$ cu $\rho(u) < \infty$ și pentru orice $\varepsilon > 0$, putem găsi $\delta > 0$ astfel încât $\rho(u\varphi_A) < \varepsilon$, pentru orice $A \in \mathcal{T}$ au proprietatea $\mu(A) < \delta$.

Teorema 3.3.3.17. (Analoaga teoremei lui Egorov).

Presupunem că spațiul măsurabil $(T, \mathcal{T}, \mu)$ are proprietatea $\mu(T) < \infty$, norma funcțională $\rho: M_+(\mu) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ este de tip absolut continuu și $\rho(T) < \infty$. Atunci, pentru orice șir $(f_n)_n \subset M_X(\mu)$, avem echivalența:

$$f_n \xrightarrow{\rho} f \text{ } \mu\text{-apt} \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{\rho} f.$$

Remarcă importantă. În general, ρ -aproape uniform convergența nu este o convergență topologică (adică, nu există o topologie τ pe $M_X(\mu)$ astfel încât ρ -aproape uniform convergența de șiruri este exact convergența în τ). Aceasta se poate vedea astfel:

- a) Folclorul matematic spune că μ -aproape peste tot convergența șirurilor μ -măsurabile de funcții nu este topologică, dacă μ este măsura Lebesgue pe $[0,1]$.
- b) Dar această convergență este exact ρ -aproape uniform convergență, pentru $\rho = \|\cdot\|_1$ (teorema clasică a lui Egorov).

După cum arată următorul exemplu, condiția $\rho(T) < \infty$ în Teorema 3.3.3.17 nu poate fi eliminată.

Același exemplu spune că implicația $(f_n \rightarrow f \mu\text{-apt}) \Rightarrow (f_n \xrightarrow{\rho} f)$ este, în general, falsă.

Exemplul 3.3.3.18. Luăm $(T, \mathcal{T}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ unde $\mu(\emptyset) = 0$ și, pentru $\emptyset \neq A \subset \mathbb{N}$, $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \text{card}(A \cap \{n\})$. Lucrăm pentru $X = K$. Avem $\mu(\mathbb{N}) = 1$ și $\mu(A) = 0$ dacă și numai dacă $A = \emptyset$, deci $M_+(\mu) = \{u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+\}$ și $M(\mu) = \{f: \mathbb{N} \rightarrow K\}$.

Norma funcțională $\rho: M_+(\mu) \rightarrow \mathbb{R}_+$ este dată de $\rho(u) = \sum_{n=1}^{\infty} u(n)$ ($\rho = \|\cdot\|_1$). Desigur ρ este de tip absolut continuu, dar $\rho(\mathbb{N}) = \infty$.

Considerăm șirul $(f_n)_n \subset M(\mu)$ dat prin $f_n = \varphi_{A_n}$, unde $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ pentru orice n . Evident $f_n \rightarrow f = \varphi_{\mathbb{N}}$ = funcția constantă egală

cu 1 peste tot. Se poate arăta că afirmația $f_n \xrightarrow{\rho} f$ este falsă.

Prima concluzie: deși $f_n \rightarrow f$ peste tot, nu avem $f_n \xrightarrow{\rho} f$ (convergența μ -apt nu implică convergența în ρ -măsură).

A doua concluzie: Teorema 3.3.3.17 nu rămâne adevărată dacă $\rho(T) = \infty$. Și anume, aici $f_n \rightarrow f \mu\text{-apt}$, dar afirmația $f_n \xrightarrow{\rho u} f$

este falsă (deoarece $f_n \xrightarrow{\rho u} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\rho} f$). $\square$

Următorul exemplu, unde condițiile Teoremei 3.3.3.17 sunt îndeplinite și ρ R-F arată că nu există nicio legătură între ρ -aproape uniform convergența și convergența în $\mathcal{L}_\rho$.

Exemplul 3.3.3.19. Vom lucra pentru $X = K$. Luăm $T = [0, 1]$, $\mathcal{T}$ = mulțimile măsurabile Lebesgue pe $[0, 1]$ și μ = măsura Lebesgue pe $[0, 1]$. Norma funcțională $\rho: M_+(\mu) \rightarrow \mathbb{R}_+$ dată prin $\rho(u) = \int u d\mu$, adică $\rho = \|\cdot\|_1$, deci $\mathcal{L}_\rho = \mathcal{L}^1(\mu)$.

- Convergența în $\mathcal{L}_\rho$ nu implică ρ -aproape uniform convergența (se construiesc șiruri din $\mathcal{L}_\rho$ în această situație).
- Invers, ρ -aproape uniform convergența nu implică convergența în $\mathcal{L}_\rho$ (adică în topologia spațiului Köthe-Bochner). La fel, se construiesc șiruri din $\mathcal{L}_\rho$ care sunt în această situație.

Remarci. 1. Punctul b) din ultimul exemplu arată că, în general, topologia convergenței în ρ -măsură $\tau_m^i(\rho)$ pe $\mathcal{L}_X(\rho)$ este strict mai slabă decât topologia Köthe-Bochner $\tau(\rho)$ pe $\mathcal{L}_X(\rho)$. Într-adevăr, deoarece $f_n \xrightarrow{\rho u} f$, rezultă că $f_n \xrightarrow{\rho} f$ (Propoziția 3.3.3.7). Dar afirmația

" $f_n \rightarrow f$ în $\tau(\rho)$ " este falsă. Exprimare alternativă: implicația " $(f_n \xrightarrow{\rho} f) \Rightarrow (f_n \rightarrow f \text{ în } \mathcal{L}_X(\rho))$ " în general, este falsă.

2. Punctul b) al exemplului arată că implicația " $(f_n \rightarrow f \mu\text{-apt}) \Rightarrow (f_n \rightarrow f \text{ în } \mathcal{L}_X(\rho))$ " în general, este falsă.

3. La punctul a) al ultimului exemplu, avem șirul $(f_n)_n$ care converge în topologia spațiului Köthe-Bochner a lui $\mathcal{L}_\rho$ și nu converge μ -apt. Deci:

3a) $(f_n)_n$ converge în ρ -măsură (Teorema 3.3.2.10) și nu converge ρ -aproape uniform. Deci implicația " $(f_n \xrightarrow{\rho} f) \Rightarrow (f_n \xrightarrow{\rho u} f)$ " (inversa uneia dintre implicațiile Propoziției 3.3.3.7) în general este falsă.

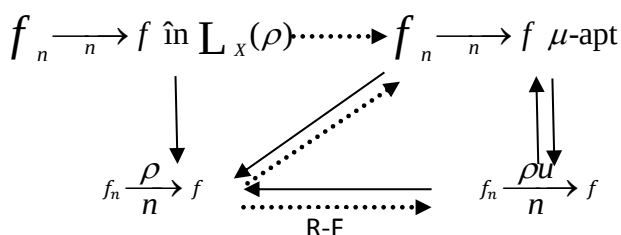
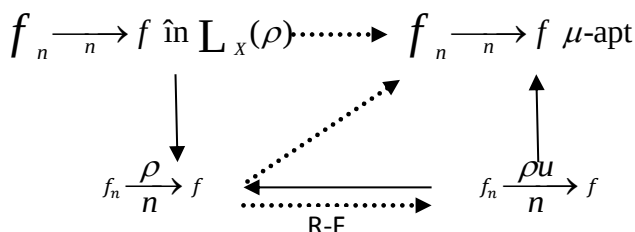
3b) Desigur, aceasta arată că implicațiile " $(f_n \rightarrow f \text{ în } \mathcal{L}_\rho) \Rightarrow (f_n \rightarrow f \mu\text{-apt})$ " și " $(f_n \xrightarrow{\rho} f) \Rightarrow (f_n \rightarrow f \mu\text{-apt})$ " în general sunt false (folosim teorema lui Egorov).

Exemplul 3.3.3.20. Lucrăm în cadrul exemplului 3.3.3.19. Un punct de acumulare al lui $\mathcal{L}_\rho$ în $(M(\mu), \tau_m(\rho))$ este $f: [0, 1] \rightarrow K$ data prin $f(0) = 0$ și $f(t) = \frac{1}{t}$, dacă $0 < t \leq 1$. Și anume, $f_n \xrightarrow{\rho} f$, unde, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) = 0$, dacă $0 \leq t < \frac{1}{n}$ și $f_n(t) = \frac{1}{t}$, dacă $\frac{1}{n} \leq t \leq 1$ (evident, $f_n \in \mathcal{L}_\rho$).

Într-adevăr, deoarece $f_n \rightarrow f$ punctual, rezultă (teorema Egorov) că $f_n \xrightarrow{\rho u} f$, deci $f_n \xrightarrow{\rho} f$. Deoarece $\rho(f) = \infty$, rezultă că $f \notin \mathcal{L}_\rho$ și $\mathcal{L}_\rho$ nu este închis în $(M(\mu), \tau_m(\rho))$. $\square$

Credem că este util să încheiem acest paragraf cu două scheme arătând implicațiile între diferite tipuri de convergențe studiate. Săgețile simple continue desemnează implicații obișnuite, în timp ce, săgețile întrerupte desemnează implicații de forma: " $(f_n \rightarrow f \text{ conform procedurii (P)}) \Rightarrow (\text{există un subșir } (f_{n_k})_k \subset (f_n)_n \text{ astfel încât } f_{n_k} \rightarrow f \text{ conform procedurii (Q)})$ ".

Prima schemă este adevărată pentru orice normă funcțională ρ (cu condiția suplimentară ρ R-F pentru $f_n \xrightarrow{\rho} f \dots\dots\dots$
 $f_n \xrightarrow{\rho u} f$). Schema a doua este adevărată adăugând condițiile $\rho(T) < \infty, \mu(T) < \infty, \rho$ de tip absolut continuu.



Capitolul 4. Spații Köthe-Bochner, proprietăți speciale

4.1 Dualul spațiilor Köthe-Bochner și proprietatea Radon-Nikodým

Pornim cu câteva noțiuni preliminare.

Considerăm spațiul cu măsură $(T, \mathcal{T}, \mu)$. Pentru funcțiile scalare $f: T \rightarrow K$, folosim noțiunile de μ -măsurabilitate și μ -integrabilitate obișnuite. Presupunem că X este spațiu Banach. Notăm $S(X, \mu)$ spațiul vectorial al tuturor funcțiilor simple cu valori în X . Elementele lui $S(X, \mu)$ sunt funcții $f: T \rightarrow X$ de forma $f = \sum_{i=1}^n \varphi_{A_i} x_i$, unde $A_i \in \mathcal{T}$ sunt mulțimi mutual disjuncte cu $\bigcup_{i=1}^n A_i = T$ și $x_i \in X$. O funcție $f: T \rightarrow X$ se numește μ -măsurabilă dacă există un șir $(f_n)_n \subset S(X, \mu)$ astfel încât $f_n \rightarrow f$ μ -apt. Putem lua $|f_n| \leq |f|$ pentru orice n . Spațiul vectorial al tuturor funcțiilor μ -măsurabile $f: T \rightarrow X$ va fi notat cu $M_X(\mu)$. Evident că $S(X, \mu) \subset M_X(\mu)$. Notăm cu $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ spațiul vectorial al tuturor funcțiilor (Bochner) μ -integrabile $f: T \rightarrow X$, adică $\mathcal{L}^1(X, \mu) = \{f \in M_X(\mu) : |f| \mu - \text{integrabilă}\}$. În cazul $X = K$, scriem $\mathcal{L}^1(\mu)$ în loc de $\mathcal{L}^1(K, \mu)$. Dacă $f = \sum_{i=1}^n \varphi_{A_i} x_i \in S(X, \mu)$ este μ -integrabilă (adică $\mu(A_i) < \infty$ pentru orice $x_i \neq 0$) și $A \in \mathcal{T}$, integrala lui f în raport cu μ pe A este $\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^n \mu(A \cap A_i) x_i$. Pentru orice $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ există un șir de funcții μ -integrabile $(f_n)_n \subset S(X, \mu)$ care este Cauchy (adică $\lim_{m,n} \int |f_m - f_n| d\mu = 0$) și astfel încât $f_n \rightarrow f$ punctual. Atunci, pentru orice $A \in \mathcal{T}$, integrala lui f în raport cu μ pe A este limita (care există) $\lim_n \int_A f_n d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_A f d\mu$.

Pentru orice măsură aditivă $m: T \rightarrow X$, variația lui m pe $A \in \mathcal{T}$ este definită prin $|m|(A) = \sup\{\sum_{i \in I} \|m(A_i)\|\}$, supremumul fiind considerat în raport cu toate familiile finite $(A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ cu A_i mutual disjuncte și astfel încât $\bigcup_{i \in I} A_i = A$. În cazul $|m|(T) < \infty$, spunem că m este cu variație mărginită. Pentru orice măsură aditivă $m: T \rightarrow X$, spunem că m este absolut continuă în raport cu μ (și scriem $m \ll \mu$) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încât, pentru orice $A \in \mathcal{T}$ cu $\mu(A) < \delta$, avem $\|m(A)\| < \varepsilon$. În cazul $m \ll \mu$, rezultă că m este σ -aditivă. Notăm că pentru $m: T \rightarrow X$, m σ -aditivă, avem echivalența: $(m \ll \mu) \Leftrightarrow (\text{pentru orice } A \in \mathcal{T} \text{ cu } \mu(A) = 0, \text{ avem } m(A) = 0)$.

Pentru orice $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ putem defini măsura (cu baza μ și densitatea f) $f\mu: T \rightarrow X$, prin $f\mu(A) = \int_A f d\mu$. Atunci $f\mu$ este σ -aditivă, cu variație mărginită ($|f\mu|(A) = \int_A |f| d\mu$ pentru orice $A \in \mathcal{T}$) și $f\mu \ll \mu$. Pentru orice măsură σ -aditivă $m: T \rightarrow X$ și orice $\emptyset \neq A \in \mathcal{T}$, scriem $m_A \stackrel{\text{def}}{=} m|_{\mathcal{T} \cap A}$, unde $\mathcal{T} \cap A = \{B \in \mathcal{T} : B \subset A\}$. Pentru $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$, $\emptyset \neq A \in \mathcal{T}$, folosim notațiile precedente pentru a nota că $f|_A = f_A \in \mathcal{L}^1(X, \mu_A)$ (în cazul $\mu(A) = 0$, avem funcția $f_A: A \rightarrow X$, $f_A = 0$ μ -apt, vezi explicațiile care urmează). Considerând măsura $m = f\mu$, avem, pentru orice $A, B \in \mathcal{T}$, $A \subset B$: $m(A) = \int_A f d\mu = m_B(A) = \int_A f_B d\mu_B$ (în particular $m(A) = \int_A f_A d\mu_A$).

Subliniem că, dacă $A \in \mathcal{T}$ și $\mu(A) > 0$, avem spațiul cu măsură $(A, \mathcal{T} \cap A, \mu_A)$, ceea ce permite notații de tipul $\mathcal{L}^1(Y, \mu_A)$, unde Y este un spațiu Banach. Dacă $\mu(A) = 0$, în $\mathcal{L}^1(Y, \mu_A)$ avem numai funcții $f: A \rightarrow Y$, nule μ -apt.

În Definiția 4.1.1 și Teorema 4.1.3 care urmează, se consideră numai spații cu măsură $(T, \mathcal{T}, \mu)$ finite, adică $\mu(T) < \infty$.

Definiția 4.1.1. Fie Y un spațiu Banach.

1. Fie $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un spațiu cu măsură și fie $\emptyset \neq A \in \mathcal{T}$. Spunem că Y are proprietatea Radon-Nikodým (R-N-P) în raport cu μ pe A dacă, pentru orice măsură σ -aditivă $m: \mathcal{T} \rightarrow Y$, cu variație mărginită astfel încât $m \ll \mu$, există $f \in L^1(Y, \mu_A)$ astfel încât $m_A = f \mu_A$ (cu convenția că, dacă $\mu(A) = 0$, avem $m_A = 0$ și $f: A \rightarrow Y$ este arbitrară). În cazul particular când $A=T$, spunem că Y are R-N-P în raport cu μ .
2. Fie $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(T)$ o σ -algebră și $\emptyset \neq A \in \mathcal{T}$. Spunem că Y are R-N-P pe A dacă, pentru orice spațiu cu măsură $(T, \mathcal{T}, \mu)$, este adevărat că Y are R-N-P în raport cu μ pe A . În cazul particular când $A=T$, spunem că Y are R-N-P (definiția principală).

Remarci. 1. Dacă Y are R-N-P în raport cu μ , rezultă că Y are R-N-P în raport cu μ pe orice $A \in \mathcal{T}$ (deoarece $m=f \mu \Rightarrow m_A = f_A \mu_A$ pentru orice A).

2. Dacă Y are R-N-P, rezultă că:

- Y are R-N-P în raport cu orice μ .
- Y are R-N-P pe orice $A \in \mathcal{T}$.

3. Dacă X este reflexiv, atunci X are R-N-P.

Urmează un rezultat important ce spune că, în scopul de a verifica validitatea R-N-P, este suficient să o verificăm pe spațiul cu măsură Lebesgue $([0,1], \Sigma, \lambda)$, unde $\Sigma =$ mulțimile măsurabile Lebesgue pe $[0,1]$ și $\lambda: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+$ este măsura Lebesgue.

Teorema 4.1.2. Fie Y un spațiu Banach. Atunci Y are R-N-P dacă și numai dacă Y are R-N-P în raport cu λ .

Teorema 4.1.3 (Teorema de localizare). Fie $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un spațiu cu măsură și fie Y un spațiu Banach. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- Spațiul Y are R-N-P în raport cu μ .
- Pentru orice $A \in \mathcal{T}$ cu $\mu(A) > 0$, există $\mathcal{T}' \ni B \subset A$ cu $\mu(B) > 0$ astfel încât Y are R-N-P în raport cu μ pe B .

Rezultate

De acum înainte, vom considera în acest capitol, ca de obicei, un spațiu cu măsură σ -finită $(T, \mathcal{T}, \mu)$, o normă funcțională saturată ρ pe $(T, \mathcal{T}, \mu)$ și un spațiu Banach X . Reamintim că ρ este saturată dacă are proprietatea că există un sir $(T_n)_n \subset \mathcal{T}$ (care poate fi luat crescător sau disjunct) cu $\bigcup_n T_n = T$, astfel încât $\mu(T_n) < \infty$ și $\rho(T_n) < \infty$ pentru orice n . Pentru orice normă funcțională ρ , construim $\rho': M_+(T, \mu) \rightarrow \mathbb{R}_+$ prin $\rho'(u) = \sup\{\int uv d\mu \mid v \in M_+(T, \mu), \rho(v) \leq 1\}$. În cazul când ρ este saturată, rezultă că ρ' este normă funcțională saturată și $\rho' \leq \rho$. Numim pe ρ' norma funcțională asociată lui ρ . Fie ρ normă funcțională saturată. Atunci L_ρ este reflexiv dacă și numai dacă $\rho \leq \rho'$ a.c. și ρ' a.c. (v. [8] și [33]).

Pentru orice două funcții μ -măsurabile $f: T \rightarrow X$, $g: T \rightarrow X'$, definim funcția $(f, g): T \rightarrow K$, prin $(f, g)(t) = g(t)(f(t))$. Putem vedea că (f, g) este μ -măsurabilă. Într-adevăr, pentru două funcții simple $f = \sum_{i=1}^m \varphi_{A_i} x_i: T \rightarrow X$ și $g = \sum_{j=1}^n \varphi_{B_j} x'_j: T \rightarrow X'$, putem „amesteca” mulțimile suport prin $A_i \cap B_j$ și este posibil să se ia în considerare $f = \sum_{i=1}^p \varphi_{D_i} u_i$, $g = \sum_{i=1}^p \varphi_{D_i} u'_i$, prin urmare $(f, g) = \sum_{i=1}^p \varphi_{D_i} u'_i(u_i)$. Prin urmare, dacă $f = \lim_n f_n$, $g = \lim_n g_n$ μ -apt, avem $(f, g) = \lim_n (f_n, g_n)$ (μ -apt).

Se observă, de asemenea, că în cazul $f \in L_X(\rho)$ și $g \in L_{X'}(\rho')$, funcția (f, g) este μ -integrabilă, deoarece $\int |(f, g)| d\mu \leq \int |f| |g| d\mu \leq \rho(f) \rho'(g) < \infty$, conform teoremei care urmează.

Teorema 4.1.4. Fie $f: T \rightarrow X$, $g: T \rightarrow X'$ funcții μ -măsurabile.

- Avem $\int |(f, g)| d\mu \leq \int |f| |g| d\mu \leq \rho(f) \rho'(g)$.
- Dacă (f, g) este μ -integrabilă, avem $|\int (f, g) d\mu| \leq \int |(f, g)| d\mu \leq \int |f| |g| d\mu \leq \rho(f) \rho'(g)$.
- Dacă (f, g) este μ -integrabilă pentru orice $f \in L_X(\rho)$ (acesta este cazul când $g \in L_{X'}(\rho')$):
 $\sup\{|\int (f, g) d\mu| \mid f \in L_X(\rho), \rho(f) \leq 1\} = \sup\{\int |(f, g)| d\mu \mid f \in L_X(\rho), \rho(f) \leq 1\} \leq \rho'(g)$.
- Presupunem că $g \in L_{X'}(\rho')$. Atunci funcția $T_g: L_X(\rho) \rightarrow K$, definită coerent prin $T_g(f) = \int (f, g) d\mu$, pentru orice $f \in \tilde{f}$, este liniară, continuă și avem $\|T_g\|_0 \leq \rho'(g)$.

În unele cazuri, inegalitatea de la punctul 3. este de fapt o egalitate.

Teorema 4.1.5 (Calculul normei lui $L_{X'}(\rho')$). Presupunem ρ' a.c. Atunci, pentru orice $g \in L_{X'}(\rho')$, putem calcula norma $\|\tilde{g}\|$ a lui $L_{X'}(\rho')$ astfel:

$$\|\tilde{g}\| = \rho'(g) = \sup\{|\int (f, g) d\mu| \mid f \in L_X(\rho), \rho(f) \leq 1\} = \sup\{\int |(f, g)| d\mu \mid f \in L_X(\rho), \rho(f) \leq 1\}.$$

Remarcă. În unele cazuri, condiția ρ' a.c. care apare în enunțul Teoremei 4.1.5 nu este necesară. De exemplu, luăm $\rho = \|\cdot\|_1$, deci $\rho' = \|\cdot\|_\infty$ și $\|\cdot\|_\infty$ nu este în general a.c. (se vede cazul măsurii Lebesgue pe $[0,1]$). În acest caz, lucrând pentru $X=K$, avem pentru orice $g \in L^\infty(\mu)$:

$$\|g\|_\infty = \sup\{|\int f g d\mu| \mid f \in L^1(\mu), \|f\|_1 \leq 1\} = \sup\{\int |f g| d\mu \mid f \in L^1(\mu), \|f\|_1 \leq 1\}.$$

Folosind teoremele 4.1.4 și 4.1.5 putem scufunda $L_{X'}(\rho')$ în $L_X(\rho)$.

Teorema 4.1.6 (Scufundarea lui $L_{X'}(\rho')$ în $(L_X(\rho))'$).

1. Pentru orice $\tilde{g} \in L_{X'}(\rho')$, avem funcționala liniară și continuă $H_{\tilde{g}}: L_X(\rho) \rightarrow K$ dată prin

$$H_{\tilde{g}}(\tilde{f}) = \int (f, g) d\mu$$
(pentru orice reprezentanți $f \in \tilde{f}, g \in \tilde{g}$) și $\|H_{\tilde{g}}\|_0 \leq \|\tilde{g}\|$.
2. Presupunem că ρ' a.c. Atunci, pentru orice $\tilde{g} \in L_{X'}(\rho')$, avem

$$\|H_{\tilde{g}}\|_0 = \|\tilde{g}\|.$$

Prin urmare, funcția liniară $\Omega: L_{X'}(\rho') \rightarrow (L_X(\rho))'$, dată prin $\Omega(\tilde{g}) = H_{\tilde{g}}$, este o izometrie. Vom spune că $L_{X'}(\rho')$ este scufundat în $(L_X(\rho))'$ (prin Ω).

Rezultatul precedent arată că, în cazul ρ' a.c., spațiul $L_{X'}(\rho')$ se scufundă în dualul $(L_X(\rho))'$ prin izometria liniară Ω . Este normal să ne întrebăm dacă scufundarea Ω este o surjecție (adică o bijecție), devenind astfel un izomorfism liniar și izometric (identificăm pe $L_{X'}(\rho')$ și $(L_X(\rho))'$).

În general, răspunsul la această întrebare este "nu". Spre exemplu, luăm $X=K, \rho=\|\cdot\|_\infty$, prin urmare $\rho'=\|\cdot\|_1$, care este a.c. Atunci $L_{\rho'}=L^1(\mu)$ nu se poate identifica cu $(L^\infty(\mu))'$. (dualul lui $L^\infty(\mu)$ este strict mai mare decât $L^1(\mu)$, în cazul când μ nu este pur atomică). Totuși, în multe cazuri, răspunsul este "da". Spre exemplu, dacă $X=K, \rho=\|\cdot\|_p, 1 < p < \infty$, prin urmare $\rho'=\|\cdot\|_q$, unde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dualul lui $L^p(\mu)$ se identifică cu $L^q(\mu)$.

Notăție. Vom scrie $(L_X(\rho))' \equiv L_{X'}(\rho')$

pentru a identifica faptul că Ω este o bijecție. În acest caz, spațiile $(L_X(\rho))'$ și $L_{X'}(\rho')$ sunt "identice".

Următorul rezultat prezintă o situație în care $(L_X(\rho))' \equiv L_{X'}(\rho')$.

Teorema 4.1.7. Fie X un spațiu Banach astfel încât X' are R-N-P.

Atunci pentru orice spațiu cu măsură σ -finită $(T, \mathcal{T}, \mu)$ și orice normă funcțională saturată ρ pe $(T, \mathcal{T}, \mu)$ astfel încât ρ a.c., ρ' a.c., avem

$$(L_X(\rho))' \equiv L_{X'}(\rho').$$

Lema complementară. Fie ρ o normă funcțională cu proprietățile $\rho(T) < \infty$ și ρ a.c. Atunci $\rho < \mu$, în sensul că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ așa ca, dacă $A \in \mathcal{T}$ și $\mu(A) < \delta$, rezultă $\rho(A) < \varepsilon$.

Un caz particular când rezultatul precedent poate fi aplicat este următorul. Fie $1 < p < \infty$ și fie $1 < q < \infty$ conjugatul lui p , adică $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Atunci $\rho = \|\cdot\|_p$ și $\rho' = \|\cdot\|_q$ sunt norme funcționale saturate, ρ a.c. și ρ' a.c. Am obținut:

Corolar 4.1.8. Fie X un spațiu Banach astfel încât X' are R-N-P. Fie $1 < p < \infty$ și fie $1 < q < \infty$, conjugatul lui p . Atunci $(L^p(X, \mu))' \equiv L^q(X', \mu)$ pentru orice spațiu cu măsură σ -finită $(T, \mathcal{T}, \mu)$.

În continuare, vom da un rezultat care este un fel de reciprocă a Teoremei 4.1.7, mai precis a Corolarului 4.1.8. Acest rezultat dă o caracterizare alternativă a R-N-P pentru dualul spațiului X' .

Vom folosi spațiul special cu măsură $([0,1], \Sigma, \lambda)$ unde Σ = mulțimile măsurabile Lebesgue pe $[0,1]$ și $\lambda: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+$ este măsura Lebesgue pe $[0,1]$.

Teorema 4.1.9. Presupunem că X este un spațiu Banach având următoarea proprietate: există $1 \leq p < \infty$ astfel încât $(L^p(X, \lambda))' \equiv L^q(X', \lambda)$, unde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Atunci X' are R-N-P.

Luând în considerare Teorema 4.1.7, Corolarul 4.1.8 și Teorema 4.1.9 obținem

Teorema 4.1.10 (Teorema de sinteză). Fie X un spațiu Banach. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. X' are R-N-P.
2. Pentru orice spațiu cu măsură σ -finită $(T, \mathcal{T}, \mu)$ și orice normă funcțională saturată ρ pe $(T, \mathcal{T}, \mu)$ astfel încât ρ a.c. și ρ' a.c., avem

$$(L_X(\rho))' \equiv L_{X'}(\rho')$$

Folosind rezultatele precedente, suntem în măsură să dăm următoarea caracterizare a reflexivității lui $L_X(\rho)$:

Teorema 4.1.11. Fie X un spațiu Banach, $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un spațiu cu măsură σ -finită și ρ o normă funcțională saturată pe $(T, \mathcal{T}, \mu)$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $L_X(\rho)$ este reflexiv.
2. L_ρ și X sunt reflexive.

Condiția ρ' ac din Teorema 4.1.7 poate fi uneori omisă (rămâne condiția ρ ac), după cum arată următorul rezultat:

Teorema 4.1.12. Fie $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un spațiu cu măsură σ -finită și X un spațiu Banach cu proprietatea că X' are R-N-P.

$$\text{Atunci } L_1(X, \mu)' \equiv L^\infty(X', \mu).$$

4.2 Spații Köthe-Bochner cu bază Schauder. Proprietăți de aproximare

În acest paragraf presupunem că X este spațiu Banach având bază Schauder $(e_n)_{n \geq 1}$. Funcționalele biortogonale corespunzătoare sunt $(x'_i)_{i \geq 1} \subset X'$. Pentru orice n , $P_n: X \rightarrow X$ este proiecția canonică definită prin $P_n(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$. Știm că $(P_n)_{n \geq 1}$ este un șir mărginit, adică $\sup_n \|P_n\|_0 = M < \infty$, unde $\|P_n\|_0$ este norma obișnuită operatorială. Vom numi M constanta de bază Schauder pentru $(e_n)_n$. În cazul $M=1$, spunem că baza Schauder este monotonă. Pentru orice funcție $f: T \rightarrow X$, $f_n: T \rightarrow X$, $f_n(t) = (P_n \circ f)(t)$ care sunt foarte importante în cele ce urmează.

Dacă X este un spațiu Banach constând din șiruri numerice (adică, un element al lui X este de forma $x = (x_n)_{n \geq 1}$ cu $x_n \in K$), în multe cazuri avem:

- a) $e_n \in X$ pentru orice n , unde $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, cu 1 pe poziția n ;
- b) $(e_n)_{n \geq 1}$ este bază Schauder pentru X .

În acest caz, vom spune că $(e_n)_{n \geq 1}$ este bază Schauder canonică pentru X .

Aceasta se întâmplă dacă $X = l^p$, $1 \leq p < \infty$. În acest caz, se vede că $(e_n)_{n \geq 1}$ este o bază Schauder monotonă.

Fie, în continuare, un spațiu cu măsură $(T, \mathcal{T}, \mu)$ și o μ -normă funcțională ρ .

Teorema 4.2.1. Orice $f \in \mathcal{L}_X(\rho)$ poate fi scris în mod unic după cum urmează (convergența este punctuală):

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i,$$

unde $a_i \in \mathcal{L}_\rho$, oricare ar fi i .

Principalul rezultat este următorul:

Teorema 4.2.2. (Teorema de aproximare) Presupunem că ρ a.c. Atunci, pentru orice $f \in \mathcal{L}_X(\rho)$, avem $f_n \xrightarrow{n} f$ în $\mathcal{L}_X(\rho)$.

Remarcă. Nu este posibil să eliminăm condiția ρ a.c., după cum vom vedea în contraexemplul următor:

Contraexemplu.

Luăm $(T, \mathcal{T}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, unde μ este măsura de numărare. Luăm ρ dată prin $\rho(u) = \sup_n u(n)$. Putem vedea că ρ nu este a.c., deoarece $\rho(u_n) = 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, unde $u_n(m) = 0$, dacă $m \leq n$ și $u_n(m) = 1$, dacă $m > n$ (evident $u_n \downarrow 0$). Aici clasele și funcțiile coincid ($\mathcal{L}_X(\rho) = \mathcal{L}_X(\rho)$), deoarece singura mulțime neglijabilă este $\emptyset$.

Luăm $X = l^2$ cu baza Schauder canonică. Luăm $f \in \mathcal{L}_X(\rho)$, dată prin $f(m) = e_m$.

Atunci $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$, $a_i = \varphi_{\{i\}}$, $f_n = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ și $\rho|f - f_n| = 1$, pentru orice n .

Prin urmare " $f_n \xrightarrow{n} f$ în $\mathcal{L}_X(\rho)$ " este falsă. $\square$

Exemplu concret.

Din nou $(T, \mathcal{T}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, unde μ este măsura de numărare (toate funcțiile sunt μ -măsurabile).

Vom considera norma funcțională $\rho = \|\cdot\|_1$, adică

$$\rho(u) = \sum_{n=1}^{\infty} u(n), \text{ pentru orice } u: \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Desigur, ρ este a.c.

Spațiul Banach X va fi spațiul Lorentz de șiruri definit astfel (v. [8]):

Luăm un șir numeric $w = (w_n)_n$ astfel încât $w_n \downarrow 0$ și $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \infty$ (de exemplu, $w_n = \frac{1}{n}$).

Luăm $1 \leq p < \infty$ și definim norma funcțională $\rho_1: M_+(\mu) \rightarrow \mathbb{R}_+$ (având proprietatea Riesz-Fischer) dată prin

$$\rho_1(u) = \sup \left(\sum_{n=1}^{\infty} u(\pi(n))^p w_n \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(supremumul fiind luat după toate bijectiile $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$). Ea generează

$$\mathcal{L}_{\rho_1} = L_{\rho_1} = d(w, p) \text{ (notație).}$$

Anume $d(w, p) = \{u: \mathbb{N} \rightarrow K \mid \rho_1(u) < \infty\}$ care este spațiu Banach, numit **spațiu Lorentz de șiruri**.

Acest spațiu admite baza canonică $(e_n)_n$ ca bază Schauder monotonă și $\|e_n\| = w_n^{\frac{1}{p}}$, pentru orice n .

Deoarece $d(w, p) \subset c_0$ = spațiul șirurilor care au limita zero, putem calcula norma în $d(w, p)$ cu

$$\|u\| = \rho_1(u) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (|u(n)|^*)^p w_n \right)^{\frac{1}{p}};$$

unde $(|u(n)|^*)_n$ este rearanjarea descrescătoare a lui $(|u(n)|)_n$.

Cum am anunțat, vom lua $X = d(w, p)$, cu $1 \leq p < \infty$ arbitrar și $w = (w_n)_n$, $w_n = \frac{1}{n}$, deci suntem interesați de $\mathcal{L}_{d(w, p)}(\rho)$.

Vom considera un exemplu particular de funcție $f \in \mathcal{L}_{d(w, p)}(\rho)$ în scopul de a studia un exemplu numeric.

Fie $t \in K$ cu $|t| < 1$.

Vom defini funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow d(w, p)$ (se va vedea că definiția este bună), prin

$$f(m) = a_m = (a_{m,n})_{n \geq 1}.$$

Aici, pentru orice $m \in \mathbb{N}$, avem $a_{m,n} = 0$, dacă $1 \leq n \leq m$ și $a_{m,n} = t^n$, dacă $n > m$.

După unele calcule obținem următoarea evaluare, adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$:

$$\rho|f - f_n| \leq n|t|^{n+1} \frac{1}{(1-|t|^p)^{\frac{1}{p}}(1-|t|)}. \quad (4.2.2)$$

Desigur, $\rho|f - f_n| \xrightarrow{n} 0$.

Luăm $\varepsilon > 0$ arbitrar. Vrem să evaluăm n pentru a avea

$$\rho|f - f_n| < \varepsilon. \quad (4.2.5)$$

Va fi suficient să avem

$$n|t|^{n+1} \frac{1}{(1-|t|^p)^{\frac{1}{p}}(1-|t|)} < \varepsilon. \quad (4.2.6)$$

Cu un extra efort, putem demonstra că este suficient să avem

$$n > \frac{2|t|^2}{(1-|t|^p)^{\frac{1}{p}}(1-|t|)^3} \cdot \frac{1}{\varepsilon} - 1. \quad (4.2.7)$$

(dependență inversă de ε).

Exemplu concret numeric.

Luăm $t = \frac{1}{2}$, $p = 2$ și $\varepsilon = 0,01 = \frac{1}{100}$.

Avem

$$\frac{2|t|^2}{(1-|t|^p)^{\frac{1}{p}}(1-|t|)^3} \cdot \frac{1}{\varepsilon} - 1 = \frac{800}{\sqrt{3}} - 1 \approx 460,88021.$$

Deci, pentru $n \geq 461$, avem $\rho|f - f_n| < \frac{1}{100}$.

Remarcă finală.

Condiția (4.2.7), care este foarte confortabil de aplicat, s-a obținut din (4.2.6), scriind $|t| = \frac{1}{1+a}$, cu $a > 0$ și majorând

$$n|t|^{n+1} = \frac{n}{(1+a)^{n+1}} < \frac{n}{\frac{(n+1)n}{2}a^2} = \frac{2}{(n+1)a^2} = \frac{2}{n+1} \cdot \frac{|t|^2}{(1-|t|)^2}.$$

Această procedură induce (din păcate) un nivel critic prea ridicat pentru n , deoarece calculul nu este foarte exact.

Prin procedeu direct, se poate arăta că, în acest caz, pentru $n \geq 70$, avem $\rho|f - f_n| < \frac{1}{100}$.

Menționăm că materialul prezentat în acest paragraf a apărut în articolul [9].

4.3 Spații Köthe-Bochner care sunt spații Hilbert sau hilbertabile

Suntem interesați de spațiile Köthe-Bochner care sunt spații Hilbert (respectiv, spații hilbertabile). Se arată că acest lucru este echivalent cu faptul că, separat, L_ρ și X sunt spații Hilbert (respectiv, hilbertabile).

4.3.1. Noțiuni preliminare

Dacă X este spațiu vectorial (peste K), vom spune că două norme $\|\cdot\|_1$ și $\|\cdot\|_2$ pe X sunt echivalente dacă există două numere $0 < a \leq b$ astfel încât $a\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq b\|\cdot\|_1$. Acest lucru este echivalent cu faptul că $\|\cdot\|_1$ și $\|\cdot\|_2$ generează aceeași topologie pe X .

Vom spune că norma $\|\cdot\|$ pe X satisface identitatea paralelogramului dacă, pentru orice x, y în X , avem

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Acest lucru este echivalent cu faptul că $\|\cdot\|$ este generată de un produs scalar $(\cdot, \cdot)$ pe X astfel încât $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ pentru orice $x \in X$, i.e. $(X, \|\cdot\|)$ este prehilbertian.

Spațiile l^2 și l^∞ , ale căror elemente sunt șiruri $(x_n)_n \subset K$, sunt definite după cum urmează:

$$l^2 = \{x = (x_n)_n \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$$

(este un spațiu Hilbert cu produsul scalar $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$, dacă $x = (x_n)_n$ și $y = (y_n)_n$;

$$l^\infty = \left\{ x = (x_n)_n \mid \sup_n |x_n| < \infty \right\}$$

(care este spațiu Banach cu norma $\|x\| = \sup_n |x_n|$).

Fie $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un spațiu cu măsură σ -finită.

O funcție pondere este o funcție $w \in M_+(\mu)$ astfel încât $\mu(\{t \in T \mid w(t) = 0\}) = \mu(\{t \in T \mid w(t) = \infty\}) = 0$. Astfel, putem considera că o funcție pondere w ia valori în $(0, \infty)$, identificând μ -apt funcțiile egale. Orice funcție pondere w definește norma funcțională hilbertiană $\rho_2(\mu, w): M_+(\mu) \rightarrow \mathbb{R}_+$, definită prin $\rho_2(\mu, w)(u) = (\int u^2 w d\mu)^{1/2}$, care este saturată.

Studiem spațiile Köthe L_ρ care sunt spații Hilbert (i.e. L_ρ este complet și există un produs scalar $(\cdot, \cdot)$ pe L_ρ astfel încât $\|\tilde{f}\| = \sqrt{(\tilde{f}, \tilde{f})}$ pentru orice $\tilde{f} \in L_\rho$), pe care le vom numi spații Köthe-Hilbert. Putem demonstra (v. [6]) că L_ρ este Köthe-Hilbert dacă și numai dacă există o funcție pondere $w: T \rightarrow (0, \infty)$ astfel încât $L_\rho = L^2(\mu, w)$, i.e. $\rho = \rho_2(\mu, w)$, ceea ce înseamnă că $\|\tilde{f}\| = \rho|f| = (\int |f|^2 w d\mu)^{1/2}$ pentru orice $f \in \tilde{f} \in L_\rho$. Produsul scalar este dat de $(\tilde{f}, \tilde{g}) = \int f \overline{g} w d\mu$. Funcția pondere w este unic μ -apt determinată de spațiul Köthe-Hilbert L_ρ .

În final, considerăm câteva notații speciale. Fie X un spațiu Banach. Dacă ρ este o μ -normă funcțională, $x \in X$ și $f \in L_\rho$, am definit $fx \in L_X(\rho)$ și $\tilde{f}x \in L_X(\rho)$ astfel: $fx: T \rightarrow X$ definită prin $(fx)(t) = f(t)x$ și $\tilde{f}x = \tilde{f}x$. Pentru exemple, vom lucra cu cazul particular de spațiu cu măsură discretă $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \text{card})$, unde $\text{card}: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ este măsura de numărare. Singura mulțime neglijabilă este $\emptyset$. O funcție $f: \mathbb{N} \rightarrow H$ este definită ca un șir: $f \equiv (x_n)_n \subset H$, unde $x_n = f(n)$ pentru orice n . Dacă X este un spațiu Banach, orice funcție $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ este card-măsurabilă. O funcție $f: \mathbb{N} \rightarrow K$, $f \equiv (x_n)_n$ este card-integrabilă dacă și numai dacă $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$ (și avem $\int f d\text{card} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$). Pentru orice card-normă funcțională ρ și orice spațiu Banach X avem $L_X(\rho) \equiv L_X(\rho)$ (clasa de echivalență în L_ρ conține doar un element). Presupunând că X el însuși este spațiu Köthe, $X = L_r$, pentru o card-normă funcțională r , avem pentru orice $f \in L_\rho(L_r)$: $f \equiv (f(m))_m$, unde $f(m) \in L_r \equiv L_r$, deci putem identifica $f(m) \equiv (x_{mn})_n \subset K$. Prin urmare, orice $f \in L_\rho(L_r)$ poate fi identificată cu o matrice scalară infinită: $f \equiv (x_{mn})_{m,n}$. Pentru simplificarea notației, aici scriem $\mathbb{N}$ în loc de $\mathbb{N}^*$.

4.3.2. Spații Köthe-Bochner care sunt spații Hilbert

Teorema 4.3.2.1. Presupunem că $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un spațiu cu măsură σ -finită, ρ este o μ -normă funcțională care este saturată și X este un spațiu Banach nenul. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. Spațiul $L_X(\rho)$ este un spațiu Hilbert.

2. Spațiile L_p și X sunt spații Hilbert.

Remarcă. Poate este instructiv să se insiste asupra interconectării structurilor Hilbert pe $L_X(\rho)$ și L_ρ . Deci, presupunem $L_X(\rho)$ că este un spațiu Hilbert. Pe parcursul demonstrației Teoremei 4.3.2.1 (partea A.a) am folosit produsul scalar $(\cdot | \cdot)$ al lui $L_X(\rho)$ pentru a construi un produs scalar $(\cdot, \cdot)$ pe L_ρ care generează norma lui L_ρ . Acest ultim produs scalar este unic, fiind generat de o unică funcție pondere.

Într-adevăr, am construit $(\cdot, \cdot)$ luând un $x \in X$ arbitrar și fixat cu $\|x\|=1$, prin $(\tilde{f}, \tilde{g}) = (\tilde{f}x | \tilde{g}x)$. Punând în evidență dependența de x , este mai bine să scriem $(\cdot, \cdot)_x$ în loc de $(\cdot, \cdot)$, prin urmare $(\tilde{f}, \tilde{g})_x = (\tilde{f}x | \tilde{g}x)$ pentru $\tilde{f}, \tilde{g}$ în L_ρ . Deoarece $(\cdot, \cdot)_x$ generează norma lui L_ρ , găsim o funcție pondere unică $w_x: T \rightarrow \mathbb{R}_+$ astfel încât $(\tilde{f}, \tilde{g})_x = \int \tilde{f} \tilde{g} w_x d\mu$ pentru orice $\tilde{f}, \tilde{g}$ în L_ρ , prin urmare $\|\tilde{f}\|^2 = (\rho | f |)^2 = \int |f|^2 w_x d\mu$ pentru orice $\tilde{f} \in L_\rho$. Acest lucru arată că toate w_x coincid μ -apt, și anume ele coincid μ -apt cu "unica" funcție pondere care generează produsul scalar (deci, norma) pe L_ρ .

În cele din urmă, este util să notăm această funcție pondere cu w și să observăm că, pentru orice $\tilde{h} \in L_X(\rho)$, avem $|h| \in L_\rho$. Atunci norma lui $\tilde{h}$ în $L_X(\rho)$ este calculată prin $\|\tilde{h}\| = \rho |h| = \int |h|^2 w d\mu$.

Exemplul 4.3.2.2. (Forma $L_\rho(L_r)$ a spațiilor de șiruri care sunt spații Hilbert).

Să considerăm două card-norme funcționale ρ și r (vezi noțiunile preliminare) astfel încât $L_\rho(L_r)$ este un spațiu Hilbert. Potrivit Teoremei 4.3.2.1, aceasta este echivalentă cu faptul că L_ρ și L_r sunt spații Hilbert. Aceasta înseamnă că $L_\rho = L^2(\text{card}, u)$ și $L_r = L^2(\text{card}, v)$ pentru niște funcții pondere $u, v: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$. Astfel, $u \equiv (a_n)_n$ și $v \equiv (b_n)_n$, unde $0 < a_n < \infty$, $0 < b_n < \infty$ pentru orice n . Rezultă că $L^2(\text{card}, u) = \{(x_n)_n \in K | \sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 a_n < \infty\}$ echipat cu norma $x \mapsto \|x\| = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 a_n)^{1/2}$ și produsul scalar $(x, y) = \sum_{n=1}^\infty x_n \overline{y_n} a_n$, unde $x \equiv (x_n)_n$ și $y \equiv (y_n)_n$. Pentru $L^2(\text{card}, v)$, înlocuim $(a_n)_n$ cu $(b_n)_n$.

Un element $f \equiv (x_{m,n})_{m,n} \in L_\rho(L_r)$ are forma $f(m) \equiv (x_{m,n})_n$ pentru orice m , prin urmare $|f|(m) = (\sum_{n=1}^\infty |x_{m,n}|^2 b_n)^{1/2}$. Atunci $\rho |f| = (\sum_{m=1}^\infty (|f|(m))^2 a_m)^{1/2} = (\sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty |x_{m,n}|^2 a_m b_n)^{1/2}$.

În consecință:

$$L_\rho(L_r) \equiv \{(x_{mn})_{m,n} \in K | \sum_{m,n} a_m b_n |x_{mn}|^2 < \infty\}$$

echipat cu norma

$$\|(x_{mn})_{m,n}\| = (\sum_{m,n} a_m b_n |x_{mn}|^2)^{1/2}$$

și produsul scalar

$$(x_{mn})_{m,n}, (y_{mn})_{m,n} = \sum_{m,n} a_m b_n x_{mn} \overline{y_{mn}}.$$

Exemplul 4.3.2.3. Vom prezenta două exemple de spații $L_\rho(L_r)$, unde ρ și r sunt card-norme funcționale astfel încât L_ρ sau L_r nu sunt Hilbert și identitatea paralelogramului este încălcată.

A. Luăm $\rho(u) = \sup_n u(n)$ și $r(u) = (\sum_{n=1}^\infty u(n)^2)^{1/2}$ pentru orice $u \in M_+(\text{card})$. Prin urmare $L_\rho = l^\infty$, $L_r = l^2$ și l^∞ nu este "bun" (nu este Hilbert). De asemenea, luăm $f: \mathbb{N} \rightarrow l^2$,

$$f(m) = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{m}, 0, 0, \dots\right)$$

($f \equiv (x_{mn})_{m,n}$, unde $x_{mn} = \frac{1}{n}$, dacă $n \leq m$ și $x_{mn} = 0$, dacă $n > m$).

Fie și $g: \mathbb{N} \rightarrow l^2$,

$$g(m) = (0, 0, \dots, 0, \frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+2}, \dots)$$

($g \equiv (y_{mn})_{m,n}$ unde $y_{mn} = 0$, dacă $n \leq m$ și $y_{mn} = \frac{1}{n}$, dacă $n > m$).

În cele din urmă: $\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{3}$, în timp ce

$$\|f\|^2 + \|g\|^2 = \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{6} - 1 = \frac{\pi^2}{3} - 1 \text{ și:}$$

$$2(\|f\|^2 + \|g\|^2) = 2\frac{\pi^2}{3} - 2 \neq \frac{\pi^2}{3} = \|f + g\|^2 + \|f - g\|^2.$$

B. Luăm $\rho(u) = (\sum_{n=1}^\infty u(n)^2)^{1/2}$ și $r(u) = \sup_n u(n)$, pentru orice $u \in M_+(\text{card})$. Prin urmare $L_\rho = l^2$ și $L_r = l^\infty$ și, din nou, l^∞ nu este "bun".

De asemenea, luăm $f: \mathbb{N} \rightarrow l^\infty$,

$$f(m) = \left(\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+2}, \dots, \frac{1}{2m}, 0, 0, \dots\right)$$

($f \equiv (x_{mn})_{m,n}$, unde $x_{mn} = \frac{1}{m+n}$, dacă $n \leq m$ și $x_{mn} = 0$, dacă $n > m$).

Fie, de asemenea $g: \mathbb{N} \rightarrow l^\infty$

$$g(m) = (0, 0, \dots, 0, \frac{1}{2m+1}, \frac{1}{2m+2}, \dots)$$

($g \equiv (y_{mn})_{m,n}$ unde $y_{mn} = 0$, dacă $n \leq m$ și $y_{mn} = \frac{1}{m+n}$, dacă $n > m$).

În cele din urmă: $\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = \frac{\pi^2}{6} - 1 + \frac{\pi^2}{6} - 1 = \frac{\pi^2}{3} - 2$, în timp ce $\|f\|^2 + \|g\|^2 = \frac{\pi^2}{6} - 1 + \frac{\pi^2}{6} - 1 = \frac{7\pi^2}{24} - 2$ și:

$$2(\|f\|^2 + \|g\|^2) = \frac{7\pi^2}{12} - 4 \neq \frac{\pi^2}{3} - 2 = \|f + g\|^2 + \|f - g\|^2. \quad \square$$

4.3.3. Spații Köthe-Bochner hilbertabile

În acest paragraf, vom trece de la nivelul izometric, descris în paragraful precedent, la nivelul izomorfic. Începem cu câteva noțiuni preliminare.

Ne amintim că, dacă X este un spațiu Banach și $Y \subset X$ este un subspațiu închis, spunem că Y este complementat dacă există un alt subspațiu închis $Z \subset X$ astfel încât $X = Y \oplus Z$ (i.e. orice $x \in X$ admite o unică descompunere $x = y + z$, cu $y \in Y$ și $z \in Z$). Pentru comoditate, vom adopta următoarea definiție.

Definiția 4.3.3.1. Fie X un spațiu Banach.

1. Spunem că X este complementabil dacă orice subspațiu închis $Y \subset X$ este complementat.
2. Spunem că X este ereditar complementabil dacă orice subspațiu închis $Y \subset X$ este complementabil.

Proprietatea 2. înseamnă: spațiul Banach Y (cu norma indusă de norma lui X) are proprietatea că, pentru orice subspațiu $H \subset Y$ închis în Y (i.e. H este închis), există un subspațiu închis $G \subset Y$ astfel încât $Y = H \oplus G$.

Propoziția 4.3.3.2. Un spațiu Banach X este complementabil dacă și numai dacă este ereditar complementabil.

Ne reamintim că un spațiu Banach $(X, \|\cdot\|)$ se numește hilbertabil dacă există o normă $\|\cdot\|$ pe X care este echivalentă cu $\|\cdot\|$ și astfel încât $(X, \|\cdot\|)$ este un spațiu Hilbert. Deoarece orice spațiu Hilbert este complementabil, rezultă că orice spațiu hilbertabil este complementabil. Un rezultat remarcabil al lui J. Lindenstrauss și L. Tzafriri spune că, invers, orice spațiu complementabil este hilbertabil (J. Lindenstrauss, L. Tzafriri. *On the complemented subspace problem*. Israel J. Math. 9 (1971), 213-269).

Acum, putem prezenta următorul rezultat.

Teorema 4.3.3.3. Presupunem $(T, \mathcal{T}, \mu)$ este un spațiu cu măsură σ -finită, ρ este o μ -normă funcțională care este saturată și X este un spațiu Banach nenul. Să considerăm următoarele afirmații:

1. Spațiul $L_X(\rho)$ este hilbertabil.
2. Spațiile L_ρ și X sunt hilbertabile.

Atunci $1. \Rightarrow 2.$ Implicația $2. \Rightarrow 1.$ este adevărată în cazul când L_ρ este tare hilbertabil, adică există o μ -normă funcțională ρ_1 astfel încât normele din L_ρ și L_{ρ_1} sunt echivalente și L_{ρ_1} este un spațiu Köthe – Hilbert.

Menționăm că materialul din acest paragraf a apărut în articolul [10].

4.4 Spații Köthe-Bochner care sunt algebre Banach cu unitate

Pornim cu câteva noțiuni preliminare.

Pentru două mulțimi nevide T și X și orice element $x \in X$, putem considera funcția constantă $\underline{x}: T \rightarrow X$, definită prin $\underline{x}(t) = x$ pentru orice $t \in T$.

Presupunem $(X, \|\cdot\|)$ spațiu normat. Dacă norma $\|\cdot\|$ se subînțelege, scriem simplu X . Dacă $f, g: T \rightarrow X$, $\alpha \in K$, definim punctual $f + g: T \rightarrow X$, $\alpha f: T \rightarrow X$ și în cazul când X este o algebră, de asemenea $fg: T \rightarrow X$.

Spunem că spațiile normate $(X_1, \|\cdot\|_1)$ și $(X_2, \|\cdot\|_2)$ sunt echivalente dacă $X_1 = X_2$ și $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ sunt norme echivalente.

Pentru alte scopuri, vom spune că un spațiu normat (respectiv Banach) $(X, \|\cdot\|)$ este algebră cu unitate normată (respectiv Banach) dacă X este o algebră nenulă cu unitate e (prin urmare $e \neq 0$) și înmulțirea în X , notată prin $(x, y) \rightarrow xy$ este continuă (i.e. există un număr $A > 0$ astfel încât $\|xy\| \leq A\|x\|\|y\|$ pentru orice $x, y \in X$). Această definiție, puțin mai generală, este aproape echivalentă cu cea standard, deoarece, în condițiile anterioare, putem defini pe X o nouă normă $\|\cdot\|$ având proprietățile $\|e\| = 1, \|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, pentru orice $x, y \in X$ și astfel încât $\|\cdot\|$ și $\|\cdot\|$ sunt norme echivalente. Într-adevăr, $\mathcal{L}(X) = \{V: X \rightarrow X | V \text{ este liniară și continuă}\}$ este o algebră normată (respectiv Banach) cu unitate, cu norma $\|V\|_0 = \sup\{\|V(x)\| | x \in X, \|x\| \leq 1\}$, înmulțirea $(U, V) \rightarrow U \circ V$ și unitatea $e: X \rightarrow X$, data prin $e(x) = x$ pentru orice $x \in X$. Folosind morfismul injectiv de algebre (scufundarea) $\Omega: X \rightarrow \mathcal{L}(X)$ dată prin $\Omega(x) = V_x$ unde $V_x(y) = xy$ pentru orice $y \in X$, definim $\|x\| = \|V_x\|_0$ pentru orice $x \in X$.

Presupunem că X este o algebră și $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ sunt norme echivalente pe X . Dacă $(X, \|\cdot\|_1)$ este o algebră normată (respectiv Banach) cu unitate e , atunci $(X, \|\cdot\|_2)$ este o algebră normată (respectiv Banach) cu aceeași unitate e și aceeași înmulțire (dacă $a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$ și $\|xy\|_1 \leq A\|x\|_1\|y\|_1$, atunci $\|xy\|_2 \leq \frac{bA}{a^2}\|x\|_2\|y\|_2$).

De aici încolo, vom presupune că $(T, \mathcal{T}, \mu)$, un spațiu cu măsură Presupunem, de asemenea că $\rho: M_+(\mu) \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o μ -normă funcțională. Vom presupune și aici că măsura μ este σ -finită pentru a nu avea probleme cu definirea funcțiilor μ -măsurabile vectoriale.

În spiritul definiției acceptate pentru algebra Banach cu unitate, vom considera o μ -normă funcțională ρ , corespunzând spațiului Köthe L_ρ și vom spune că L_ρ este algebră Köthe Banach cu unitate dacă următoarele condiții îndeplinite:

- a) L_ρ este un spațiu Banach.
- b) $\underline{1} \in L_\rho$.
- c) Pentru orice $f, g \in L_\rho$, avem $fg \in L_\rho$.
- d) Există un număr $A > 0$ astfel încât $\rho|fg| \leq A\rho|f|\rho|g|$ pentru orice $f, g \in L_\rho$.

Se poate observa imediat că, în aceste condiții, L_p devine o algebră comutativă Banach cu unitate $\underline{1}$ și înmulțirea definită pe reprezentanți astfel: $\tilde{f}\tilde{g} \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{fg}$ pentru orice $\tilde{f}, \tilde{g}$ în L_p . Aceasta justifică numele de algebră Köthe Banach cu unitate. Evident, $L^\infty(\mu)$ este o algebră Köthe Banach cu unitate.

Prezentăm o teoremă care arată de fapt că $L^\infty(\mu)$ este singura algebră Köthe Banach cu unitate (a se vedea [7]).

Teorema A. Fie ρ o μ -normă funcțională. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. L_ρ este o algebră Köthe Banach cu unitate.
2. Spațiile Banach L_ρ și $L^\infty(\mu)$ sunt echivalente.

Referitor la implicația $2. \Rightarrow 1.$ ne simțim obligați să observăm că, datorită echivalenței, avem $L_\rho = L^\infty(\mu)$ ca mulțimi, în consecință pe L_ρ considerăm înmulțirea dată de $L^\infty(\mu)$.

Pentru exemplificare, la sfârșitul paragrafului ne vom ocupa de spațiile cu măsură discretă $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \text{card})$ (și, aici, scriem $\mathbb{N}$ în loc de $\mathbb{N}^*$), unde $\text{card}: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, este măsura de numărare, dată prin $\text{card}(A) = \text{numărul elementelor lui } A$, dacă A este finită și $\text{card}(A) = \infty$, dacă A este infinită. Singura mulțime neglijabilă este $\emptyset$. O funcție $f: \mathbb{N} \rightarrow H$ se identifică cu un șir $f \equiv (x_n)_n \subset H$, unde $x_n = f(n)$ pentru orice n . Dacă X este spațiu Banach, orice funcție $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ este card -măsurabilă. Pentru orice card -normă funcțională ρ și orice spațiu Banach X , avem $L_X(\rho) \equiv \mathcal{L}_X(\rho)$ (clasele de echivalență în $L_X(\rho)$ conțin doar un element). Este evident că, în acest caz, dacă $u \equiv (u_n)_n \in M_+(\text{card})$, avem $\|u\|_\infty = \sup_n u_n$. Prin urmare, introducând spațiul Banach clasic

$$l^\infty = \left\{ x = (x_n)_n \mid x_n \in K, \sup_n x_n < \infty \right\}$$

cu norma $\|x\| = \sup_n |x_n|$ ca mai sus, avem $L^\infty(\text{card}) = l^\infty$.

Presupunând $X = L_r, L_r$ spațiu Köthe (Banach) pentru o anumită card -normă funcțională r , avem pentru orice $f \in L_\rho(L_r)$: $f \equiv (f(m))_m$, unde $f(m) \in L_r = L_r$, prin urmare putem identifica $f(m) \equiv (x_{mn})_n \subset K$. În consecință, orice $f \in L_\rho(L_r)$ poate fi identificată cu o matrice scalară infinită: $f \equiv (x_{mn})_{m,n}$. Aceste considerații au mai fost făcute. Le repetăm pentru ușurarea citirii.

Cu privire la spațiile Köthe-Bochner, avem întâi un rezultat preliminar.

Definiția 4.4.1. Două μ -norme funcționale ρ_1 și ρ_2 se numesc echivalente dacă există două numere $0 < a \leq b$ astfel încât $a\rho_1(u) \leq \rho_2(u) \leq b\rho_1(u)$ pentru orice $u \in M_+(\mu)$.

Lema 4.4.2. Fie ρ_1 și ρ_2 două μ -norme funcționale. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. ρ_1 și ρ_2 sunt echivalente.
 2. Pentru orice spațiu Banach nenul X , spațiile normate $L_X(\rho_1)$ și $L_X(\rho_2)$ sunt echivalente.
 3. Există un spațiu Banach nenul X astfel încât spațiile normate $L_X(\rho_1)$ și $L_X(\rho_2)$ sunt echivalente.
- Dacă 1. (sau 2. sau 3.) este valabil, avem $\mathcal{L}_X(\rho_1) = \mathcal{L}_X(\rho_2)$.

După acest rezultat preliminar, vom considera fixată o algebră Banach $(X, \|\cdot\|)$ cu unitate e (și un număr $A > 0$ astfel încât $\|xy\| \leq A\|x\|\|y\|$ pentru orice x, y în X). Norma spațiului L_ρ va fi notată cu $\|\cdot\|$ și norma spațiului $L_X(\rho)$ va fi notată cu $\|\cdot\|_X$.

Definiția 4.4.3. Vom spune că $L_X(\rho)$ este algebră Köthe-Bochner Banach cu unitate dacă următoarele condiții sunt îndeplinite:

1. $(L_X(\rho), \|\cdot\|_X)$ este un spațiu Banach.
2. Avem $\underline{e} \in L_X(\rho)$.
3. Pentru orice f, g în $L_X(\rho)$, avem $fg \in L_X(\rho)$.
4. Există un număr $B > 0$ astfel încât $\rho|fg| \leq B\rho|f|\rho|g|$, pentru orice f, g în $L_X(\rho)$.

Remarcă. Din 3. rezultă că, dacă $\tilde{f}, \tilde{g}$ sunt în $L_X(\rho)$, putem defini produsul $\tilde{f}\tilde{g} \in L_X(\rho)$ prin $\tilde{f}\tilde{g} \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{fg}$ (pe reprezentanți) și, având în vedere 4., acest produs este continuu:

$$\|\tilde{f}\tilde{g}\|_X = \rho|fg| \leq B\rho|f|\rho|g| = B\|\tilde{f}\|_X\|\tilde{g}\|_X.$$

Prin urmare, algebra normată $(L_X(\rho), \|\cdot\|_X)$ are unitate $\underline{e}$ (din 2.) și este Banach (din 1.). Aceasta conduce la faptul că $(L_X(\rho), \|\cdot\|_X)$ este algebră Banach cu unitate (care este comutativă dacă X este comutativă). Prin urmare, numele de algebră Köthe-Bochner Banach este adecvat.

Evident, $L^\infty(X, \mu)$ este o algebră Köthe-Bochner Banach cu unitate.

Teorema 4.4.4. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $(L_X(\rho), \|\cdot\|_X)$ este o algebră Köthe-Bochner Banach cu unitate.
2. $(L_\rho, \|\cdot\|)$ este o algebră Köthe Banach cu unitate.
3. Spațiile Banach $L_X(\rho)$ și $L^\infty(X, \mu)$ sunt echivalente.
4. Spațiile Banach L_ρ și $L^\infty(\mu)$ sunt echivalente.

Exemplul 4.4.5. (Forma spațiilor $L_\rho(L_r)$ care sunt algebre Köthe-Bochner Banach cu unitate).

În cazul spațiului cu măsură discretă $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \text{card})$, putem vedea că $L^\infty(\mu) = \mathcal{L}^\infty(\mu) = l^\infty$. Prin urmare, o algebră Köthe Banach cu unitate L_r în acest caz trebuie să fie echivalentă cu l^∞ , i.e. $L_r = l^\infty$ cu norme echivalente.

Folosind teorema precedentă, pentru acest $L_r = l^\infty$, un spațiu $L_\rho(L_r)$ este o algebră Köthe-Bochner Banach cu unitate dacă și numai dacă L_ρ și l^∞ sunt spații Banach echivalente, i.e. $L_\rho = l^\infty$ cu norme echivalente.

Un element $f \equiv (x_{mn})_{m,n} \in L_\rho(L_r)$ are forma $f(m) = (x_{mn})_n \in l^\infty$ pentru orice m . Avem, pentru orice m :

$$a \sup_n |x_{mn}| \leq |f|(m) \leq b \sup_n |x_{mn}|$$

pentru niște numere fixate $0 < a \leq b$ care nu sunt dependente de m . Atunci, există $0 < A \leq B$ astfel încât

$$A \sup_m |f(m)| \leq \rho |f| \leq B \sup_m |f(m)|$$

i.e.

$$Aa \sup_{m,n} |x_{mn}| \leq \|f\| \leq Bb \sup_{m,n} |x_{mn}|$$

(norma calculată în $L_p(L_r)$).

În cele din urmă, se vede că

$$L_p(L_r) \equiv \left\{ (x_{mn})_{m,n} \in K \mid \sup_{m,n} |x_{mn}| < \infty \right\}$$

echipat cu o normă $\|\cdot\|$ având proprietatea că există numerele $0 < L \leq M$ astfel încât

$$L \sup_{m,n} |x_{mn}| \leq \|(x_{mn})_{m,n}\| \leq M \sup_{m,n} |x_{mn}|.$$

Bibliografie

1. R.P. Boas, Jr. *Some uniformly convex spaces*. Bull. Amer. Math. Soc. 46 (1940), 304-311.
2. R.D. Bourgin. *Geometric Aspects of Convex Sets with the Radon-Nikodým Property*. Lecture Notes in Math 993 Springer-Verlag, N Y, 1983.
3. A.V. Buhvalov. *Radon-Nikodým property in Banach spaces of measurable vector functions*. Math. Notes, 26 (1979), 939-944.
4. Ch. Castaing, R. Pluciennik. *Denting Points in Köthe-Bochner spaces*. Set – valued Analysis 2 (1994), 439-458.
5. J. Cerdà, H. Hudzik, M. Mastlylo. *Geometric properties in Köthe-Bochner spaces*. Proc. Camb. Phil. Soc. 120 (1996), 521-533.
6. I. Chițescu. *Köthe spaces that are Hilbert spaces*. Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S.R. 18 (66) (1976), 25-29.
7. I. Chițescu. *Köthe spaces that are Banach algebras with unit*. Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S.R. 18 (66) (1976), 269-271.
8. I. Chițescu. *Spații de funcții*. Ed. Șt. Encicl. București, 1983.
9. I. Chițescu, R.-C. Sfetcu, O. Cojocaru. *Approximation of Köthe-Bochner Spaces $L_p(X)$ in case X Has a Schauder Basis*. Roum. J. Information Sci. Techn. 18(1) (2015), 69-78.
10. I. Chițescu, R.-C. Sfetcu, O. Cojocaru. *Köthe-Bochner Spaces that Are Hilbert Spaces*. Apare în Carpathian Journal of Mathematics. Online version available at <http://carpathian.ubm.ro>. Print Edition: ISSN 1584-2851. Online Edition: ISSN 1843-4401.
11. R. Cristescu. *Analiză funcțională* (ed III). Ed. Did. Ped., București, 1979.
12. M.M. Day. *Some more uniformly convex spaces*. Bull. Amer. Math. Soc. 47 (1941), 504-507.
13. J. Diestel, J.J. Uhl, Jr. *Vector Measures*. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island, 1977.
14. J. Dieudonné. *Sur les espaces de Köthe*. Journal d'Analyse Mathématique. 1(1951), 81-115.
15. N. Dinculeanu. *Vector Measures*. Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1966.
16. N. Dunford, J.T. Schwartz. *Linear Operators*. Part I. Interscience Publishers, New York, 1957.
17. P.R. Halmos. *Measure Theory*. D. Van Nostrand Company, Inc. Princeton (eleventh printing), 1966.
18. H. Hudzik, R. Landes. *Characteristic of convexity of Köthe function spaces*. Math. Ann. 294 (1992), 117-124.
19. H. Hudzik, M. Mastlylo. *Strongly extreme points in Köthe – Bochner spaces*. Rocky Mountain J. Math. 23 (1993), 899-909.
20. A. Kaminska, B. Turett. *Rotundity in Köthe spaces of vector-valued functions*. Can. J. Math. 41 (1989), 659-675.
21. J.L. Kelley. *General Topology*. D. Van Nostrand Company. Toronto – New York – London, 1955.
22. G. Köthe. *Neubegründung der Theorie der vollkommenen Räume*. Math. Nachr. 4(1951), 70-80.
23. G. Köthe, O. Toeplitz. *Lineare Räume mit unendlichvielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen*. Journal de Crelle 171(1934), 193-226.
24. P.-K. Lin. *Köthe-Bochner Function Spaces*. Springer – Science + Business Media, LLC, 2004.
25. P.-K. Lin. *Stability of some properties in Köthe-Bochner function spaces*. In Function Spaces, the fifth conference. Pure and Applied Math. Vol. 213, Marcel Dekker, Inc. (2000), 347-357.
26. W.A.J. Luxemburg. *Banach function spaces*. Thesis. Delft Institute of Technology. 1971.
27. W.A.J. Luxemburg, A.C. Zaanen. *Notes on Banach function spaces*. Indag. Math. Note I, A 66 (1963), 135-147 - Note XVI, A 68 (1965), 646-667.
28. W.A.J. Luxemburg, A.C. Zaanen. *Riesz Spaces*, vol.I. North Holland, Amsterdam, 1971.
29. M. Nicolescu. *Funcții reale și elemente de topologie*. Ed. Did. Ped., București, 1968.
30. Phuong Cúc. *On Dieudonné's paper <<Sur les espaces de Köthe>>*. Proc. Cambridge Phil. Soc. 62 (1966), 29-32.
31. H.H. Schaeffer. *Topological Vector Spaces (third printing corrected)*. Springer, 1970.
32. D. Tomescu. *Construction of a function seminorm having the Riesz-Fischer property*. Bull. Math. Soc. Sci. R.S.R. 27(72), (1980), 209-213.
33. A.C. Zaanen. *Integration*. North Holland, Amsterdam, 1967.