UNIVERSITATEA DIN PITEȘTI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
ȘCOALA DOCTORALĂ DE MATEMATICĂ

REZUMATUL TEZEI DE DOCTORAT

GENERALIZĂRI ALE SISTEMELOR ITERATIVE DE FUNCȚII

Conducător științific
Prof. Univ. Dr. Ion CHIȚESCU

Doctorand
Loredana Mădălina IOANA

2016

CUPRINS

0 Introducere

Teoria fractalilor are o istorie lungă şi complicată, din două motive: pe de-o parte, termenul de fractal nu este definit riguros, pe de-altă parte, fractalii (în diferite accepţiuni) apar pretutindeni şi mereu. În acest sens, putem vorbi despre Aristotel, care credea că un salt între două specii poate fi „umplut“ cu specii intermediare. În spiritul acestei idei, Leibniz (adept fervent al ideii „Natura non facit saltus“) a avut ideea (nefinalizată) a calculului integro-diferenţial fracţionar. Mulţimile „ciudate“ imaginate de Peano, Cantor, Von Koch şi funcţia „monstruoasă“ a lui Weierstrass sunt exemple de fractali. La fel, imaginea unei mişcări browniene sau coasta britanică (în viziunea lui Mandelbrot). Definirea dimensiunii („fractalii au dimensiune fracţionară“ poate fi o deviză) ne duce la nume mari: Hausdorff, Besicovitch, Cantor, Minkowski, Bouligand. Ideea de atractor a fost, se pare, formalizată prima dată de Poincaré.

Acestea sunt fapte oarecum disparate, în spiritul ideii pe care am subliniat-o la început: nu există o definiţie formală precisă şi unanim acceptată a noţiunii de fractal. Două variante de definiţie par să se impună mai mult:

1. Fractalii au dimensiune neîntreagă („fracţionară“).
2. Fractalii sunt autosimilari.

Istoria modernă a fractalilor este legată de ideea de iteraţie. Această istorie debutează la începutul secolului 20 cu memoriile lui G. Julia [30] şi P. Fatou [25], care discută despre iterarea funcţiilor raţionale (privite pe sfera lui Riemann).

Remarcăm că, de fapt, aceste două memorii au rămas, practic, neînţelese multă vreme. De asemenea, remarcăm că, deşi cei doi autori francezi nu dispuneau la vremea scrierii operei lor de calculatoare electronice, ei au anticipat formele geometrice misterioase generate prin iterarea funcţiilor raţionale. Istoria s-a schimbat mult mai târziu (anii 70 ai secolului 20) când reluarea lucidă a lucrărilor lui G. Julia şi P. Fatou făcută de B. Mandelbrot a dus la reconsiderarea acestor lucrări, propunându-se şi numele de „fractal“. În plus, B. Mandelbrot, cu o viziune matematică şi filosofică integratoare, a adus teoria fractalilor în prim planul multor teorii şi activităţi umane. Cartea sa [35] este, şi acum, o sursă inepuizabilă de inspiraţie în teoria fractalilor. Ulterior, această teorie a urmat două căi majore de dezvoltare. Prima cale (nu ne ocupăm de ea în această lucrare) este urmarea firească a lucrărilor lui G. Julia si P. Fatou, în spiritul dinamicii funcţiilor analitice complexe de variabilă complexă. A se vedea în acest sens [42], [24], [3].

A doua cale a fost iniţiată de matematicianul australian J. Hutchinson în articolul [29] (prezenta lucrare se încadrează în această cale). În [29], J. Hutchinson introduce noţiunea de sistem iterativ de contracţii, care conduce, folosind metrica Hausdorff-Pompeiu, la contracţia lui Hutchinson (pe mulţimi). Folosirea principiului contracţiei (Banach-Caccioppoli-Picard) conduce la găsirea punctului fix al acestei contracţii (atractorul sistemului iterativ de contracţii). Acest punct fix, care este o mulţime compactă, este (de cele mai multe ori) o mulţime cu proprietăţi speciale (de exemplu autosimilară) şi o putem considera un fractal. Urmând aceleaşi idei şi considerând o distribuţie de probabilităţi asociată sistemului iterativ de funcţii, J. Hutchinson introduce şi operatorul Markov asociat, care este o contracţie pe spaţiul probabilităţilor, cu metrica dată de norma Monge-Kantorovich. Se obţine şi punctul fix al operatorului Markov, adică măsura (probabilitatea) invariantă.

Teoria iniţiată de J. Hutchinson a generat cercetări intense şi o vastă bibliografie. Menţionăm că o contribuţie esenţială la dezvoltarea şi popularizarea teoriei lui J. Hutchinson a avut-o alt australian – M. Barnsley, a cărui monografie [3] (mai multe ediţii) a avut un mare succes şi a făcut cunoscută teoria fractalilor marelui public. Teoria standard a lui J. Hutchinson pune în evidenţă, ca exemple de aplicare, fractali clasici celebri, ca mulţimea lui Cantor, covorul lui Sierpinski, fulgul lui Von Koch etc. Ca în orice teorie matematică, tendinţa de generalizare s-a manifestat şi în teoria fractalilor, varianta Hutchinson.

Credem că în această teorie, generalizările pot fi de două feluri: generalizări ale unor modele clasice şi generalizări obţinute prin trecerea la structuri mai generale. Prezenta teză de doctorat este scrisă în acest spirit, urmând ideile de mai sus.

Menţionăm că am folosit în lucrare în mod alternativ denumirea românească *sistem iterativ de funcţii*, cât şi denumirea anglo-saxonă *IFS* (*iterated function system*).

Capitolul 2 al prezentei lucrări, intitulat „Sisteme iterative generalizate de tip Cantor“, se încadrează în primul tip de generalizări. În mod concret, generalizăm cu ajutorul unui parametru $\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ sistemul iterativ care are ca atractor mulţimea lui Cantor. Referitor la acest tip de generalizări, rezultate interesante se găsesc în [46], [24], [33], [2], [1], [5], [23], [44] etc.

În ceea ce priveşte teoria sistemelor iterative a lui Hutchinson, generalizările obţinute prin trecerea la structuri mai generale pot fi grupate, în opinia noastră, în două categorii: considerarea în structura sistemului iterativ de mulţimi (familii) de contracţii care nu sunt neapărat finite (am numit în lucrare sisteme iterative infinite sistemele iterative aflate în această situaţie) sau considerarea de mulţimi „infinit dimensionale“ în care să ia valori contracţiile din sistem sau măsurile „operatorului Markov“ ataşat.

Capitolul 3 al acestei lucrări, intitulat „Sisteme iterative infinite. Subsisteme iterative“ se încadrează în ideea de a considera familii de contracţii care nu sunt neapărat finite.

Capitolul 4 al acestei lucrări se încadrează în ideea de a lucra cu spaţii Banach (de fapt Hilbert) eventual infinit dimensionale, în special în ceea ce priveşte măsurile invariante (care sunt vectoriale).

Referitor la considerarea de sisteme iterative infinite, există o literatură foarte bogată. De exemplu, se pot consulta [46], [41], [39], [37], [36] etc.

Referitor la considerarea teoriei lui Hutchinson pe spaţii Banach oarecare sau pe structuri mai complicate, vom cita în primul rând articolul [38] care considera problema măsurilor vectoriale invariante dintr-un punct de vedere dual celui prezentat de noi în capitolul 4. Menţionăm că în cazul unui număr finit de contracţii regăsim, ca un caz particular, rezultatele din prima parte a articolului [38]. De asemenea, se pot consulta [6], [4], [44], precum si [12], [13], [14] etc.

În cele ce urmează vom prezenta, pe scurt, conţinutul lucrării.

Capitolul 1 este intitulat „Preliminarii“. Se prezintă câteva notaţii şi noţiuni generale care sunt folosite pe tot parcursul lucrării.

Menţionăm că, pentru a facilita citirea, am preferat ca, la începutul fiecărui capitol să facem prezentarea notaţiilor, noţiunilor şi rezultatelor specifice respectivului capitol.

Capitolul 2 este intitulat „Sisteme iterative generalizate de tip Cantor“. În acest capitol care, practic, este în întregime original, prezentăm o generalizare parametrică a mulţimii lui Cantor şi a sistemului iterativ care generează mulţimea lui Cantor. Parametrul θ pe care se bazează modelul propus este în intervalul $\left(0, \frac{1}{2}\right]$. Pentru $\theta = \frac{1}{3}$ se regăseşte mulţimea clasică a lui Cantor.

În primul paragraf, intitulat „Preliminarii“ prezentăm instrumentele folosite (sisteme iterative finite de funcţii, metrica Hausdorff-Pompeiu, măsura invariantă). Menţionam ca fapt de originalitate distincţia pe care o facem între surjecţia canonică obişnuită π (având ca imagine atractorul sistemului iterativ) şi coextensia ei $\overline{\pi}$, cu consecinţele de calcul privind măsura invariantă.

Al doilea paragraf, intitulat „Mulţimea invariantă“ este în întregime original. Prezentăm o generalizare parametrică a sistemului iterativ care generează mulţimea lui Cantor. Pe baza unor calcule precise, putem prezenta exact structura mulţimii generalizate de tip Cantor (Teorema 2.2.5).

Al treilea paragraf, intitulat „Măsura invariantă“ este în întregime original. Se prezintă calcule precise, în toate cazurile, ale valorilor măsurii invariante pentru sistemul iterativ propus de noi (Teorema 2.3.2, Lema 2.3.6, Lema 2.3.7, Lema 2.3.8, Teorema 2.3.9). Se arată că măsura invariantă este non-atomică şi singulară în cazul când parametrul θ este în intervalul $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ (Teorema 2.3.4). În cazul când $\theta = \dfrac{1}{2}$, se arată că măsura invariantă coincide cu măsura Lebesgue (Lema 2.3.5). Se prezintă şi structura exactă a surjecţiei canonice (Teorema 2.3.10), precum şi calcule speciale în cazul când parametrul θ este de forma $\dfrac{1}{p}$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$.

Al patrulea paragraf, în întregime original, este intitulat „Dependenţa de parametru“. Se studiază felul cum depind de parametrul $\theta \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$ mulţimea invariantă şi măsura invariantă. Rezultatele principale sunt Teorema 2.4.1(mulţimea invariantă depinde lipschitzian, în metrica Hausdorff-Pompeiu, de parametrul θ) şi Teorema 2.4.3 (măsura invariantă depinde lipschitzian, în metrica Hutchinson, de parametrul θ). Este studiat şi cazul degenerat $\theta = 0$.

Al cincilea paragraf, intitulat „Consideraţii generale asupra paragrafului 2.4“ studiază din punct de vedere calitativ felul cum evoluează mulţimile invariante şi măsurile invariante atunci când parametrul θ se schimbă. Se constată că acumulări (schimbări) cantitative pot duce la salturi calitative (care pot fi discontinue).

Remarcă. Ne propunem ca, în viitor, să publicăm materialul prezentat în acest capitol.

Capitolul 3 este intitulat „Sisteme iterative infinite. Subsisteme iterative“. Acest capitol este în întregime original, fiind bazat pe articolele [15] şi [40].

Prezentăm rezultate privind sisteme iterative generale (nu neapărat infinite) numite aici, în baza unei cutume actuale, sisteme iterative infinite.

În primul paragraf, intitulat „Introducere. Rezultate pregătitoare“ se prezintă noţiunile şi rezultatele preliminare necesare pentru expunerea din paragraful următor. Teorema 3.1.6 este originală.

Paragraful al doilea este intitulat „Rezultate“ şi prezintă rezultatele noastre privind subsistemele unor sisteme iterative infinite. Ne referim la două probleme pentru care propunem anumite soluţii. Prima problemă este legată de subspaţiile de tip $\mathcal{A}$ (adică subspaţiile în care există o submulţime densă de cardinal $\leq \mathcal{A}$) ale unui spaţiu metric, unde $\mathcal{A}$ este un număr cardinal transfinit (infinit). A doua problemă se referă la structura atractorilor unui subsistem, inclusiv la posibilitatea ca un subsistem al unui sistem iterativ infinit să aibă acelaşi atractor ca întregul sistem. Referitor la prima problemă, avem Teoremele 3.2.1 şi 3.2.2. Teorema 3.2.1 arată că atractorul este de tip mai mic sau egal decât cardinalul setului de funcţii din sistem. Teorema 3.2.2 arată că, pentru o submulţime închisă şi mărginită A a unui spaţiu complet, care, ca subspaţiu, este de un tip dat $\mathcal{A}$, putem găsi un sistem iterativ infinit de cardinal $\leq \mathcal{A}$, care să aibă pe A ca atractor. Referitor la a doua problemă, avem teoremele 3.2.3 şi 3.2.5, precum şi Corolarul 3.2.4. În Teorema 3.2.5 se arată că, dacă atractorul unui sistem iterativ infinit este de tip $\mathcal{A}$, putem găsi un subsistem de cardinal $\leq \mathcal{A}$ cu acelaşi atractor. Teorema 3.2.3 şi Corolarul 3.2.4 se referă la structura atractorului legată de atractorii unor subsisteme care exhaustează sistemul iniţial. Teorema 3.2.6 prezintă condiţii în care un subsistem generează acelaşi atractor ca întregul sistem.

Capitolul 4 este intitulat „Spaţii speciale de funcţii şi de măsuri. Măsuri invariante“. Şi acest capitol este în întregime original.

Se începe cu un prim paragraf intitulat „Integrala seschiliniară uniformă“. Rezultatele din acest paragraf au fost publicate în articolul [16]. Le prezentăm aici fără demonstraţii. În esenţă, este vorba de o integrală a unei funcţii continue f în raport cu o măsura vectorială μ, atât f cât şi μ

având valori într-un spaţiu Hilbert. Rezultatul integrării (integrala) este scalar.

Al doilea paragraf este intitulat „Norme şi topologii pe anumite spaţii de măsuri". Rezultatele din acest paragraf, cu excepţia subparagrafului 4.2.4, au apărut în articolul [17]. Le prezentăm aici fără demonstraţii. Se folosesc foarte mult structurile de tip funcţii Lipschitz. Cu ajutorul lor şi cu ajutorul integralei introduse în paragraful precedent, se introduc norme şi metrici de tip Monge-Kantorovich pe spaţiul măsurilor vectoriale cu variaţie mărginită. În acest fel se generalizează rezultate clasice privind metricile pe spaţii de probabilităţi. În legatură cu rezultatele din acest paragraf, se pot consulta [27] şi [34]. În cadrul acestui paragraf, subliniem subparagraful 4.2.4, intitulat „Consideraţii suplimentare privind spaţiile de funcţii vectoriale continue şi norma Monge-Kantorovich". Materialul din acest subparagraf, pentru care se prezintă demonstraţii, nu apare în articolul [17] şi este în întregime original. În esenţă, în acest subparagraf demonstrăm faptul că, dacă T este un spaţiu metric compact şi X este un spaţiu Hilbert, funcţiile lipschitziene pe T cu valori în X sunt dense în spaţiul funcţiilor continue pe T cu valori în X (Teorema 4.2.15). Acest fapt are drept consecinţă separabilitatea lui $\mathcal{C}(T, X)$ în cazul când X este separabil şi un mod nou, original, de introducere a normei Monge-Kantorovich, urmând o schemă generală.

Al treilea paragraf, în întregime original, intitulat „Cadrul de lucru", este pregătitor pentru paragrafele următoare. Se precizează noţiunile şi notaţiile care urmează a fi folosite şi se demonstrează câteva rezultate cu caracter tehnic privitoare la acest cadru în care apare o familie specială de funcţii lipschitziene şi o familie specială de operatori pe spaţii Hilbert.

Al patrulea paragraf este intitulat „Operatori pe spaţii de funcţii continue" şi este în întregime original. Folosind rezultatele din paragrafele anterioare şi integrala Bochner introducem, în cadrul precizat, anumiţi operatori de tip integral pe spaţiul funcţiilor continue (sau lipschitziene) vectoriale pe un spaţiu metric compact. Se dau estimări pentru normele acestor operatori (Teoremele 4.4.3, 4.4.5, 4.4.6). Trecând la adjuncţii sus-numiţilor operatori se obţin operatori pe spaţii de măsuri vectoriale, cu normele introduse în paragrafele anterioare. În acest sens, avem o teoremă de schimbare de variabilă (Teorema 4.4.7) şi estimări ale normelor operatorilor pe spaţii de măsuri (Teoremele 4.4.8, 4.4.9, 4.4.11).

Al cincilea paragraf, intitulat „Cazuri particulare" este, şi el, în întregime original. Prezentăm cazuri speciale în care schema generală prezentată anterior poate fi folosită: semigrupuri de operatori, cazul când toate aplicaţiile lipschitziene considerate în schemă sunt constante, cazul discret (care se împarte în cazul finit – avem un număr finit de aplicaţii în schemă şi cazul numărabil – avem un şir de aplicaţii în schemă). Referitor la cazul discret prezentăm calcule complete privind structura operatorilor pe spaţii de măsuri care apar.

Ultimul paragraf al capitolului (al şaselea) este intitulat „Măsuri invariante fractale" şi este în întregime original. Folosind materialul anterior şi estimările normelor operatorilor introduşi pe spaţiile de măsuri, considerăm anumite contracţii pe spaţii de măsuri. Cu ajutorul a două scheme de contracţie, obţinem puncte fixe, folosind principiul contracţiei Banach-Caccioppoli-Picard.

Incheiem cu prezentarea unor calcule concrete, numerice, exemplificând cele două scheme generale.

Remarcă. Ne propunem ca, în viitor, să publicăm şi materialul din acest capitol, mai precis materialul din paragrafele 4.3, 4.4, 4.5 şi 4.6.

Lucrările cu caracter general care au fost folosite: Pentru Topologie Generala : [32]; pentru Teoria Măsurii şi Integralei: [28], [21], [11], [9], [43], [20], [26], [47], [8], [19], [10]; pentru Analiză Funcţională: [18], [22], [31]; pentru Teoria Punctului Fix: [7], [45].

În incheiere, exprim mulţumiri respectuoase conducătorului meu ştiinţific, prof. univ.dr. Ion Chiţescu, pentru îndrumarea continuă şi sprijinul acordat pe tot parcursul elaborării acestei lucrări.

1 Preliminarii

În această lucrare notaţiile utilizate vor fi cele general acceptate. Spre exemplu, prin $\mathbb{R}$ vom desemna mulţimea numerelor reale, $\mathbb{N}$ va reprezenta mulţimea numerelor naturale, $\mathbb{N} = \{0, 1, ..., n, ...\}$, iar $\mathbb{N}^*= \mathbb{N}\backslash\{0\} = \{1, 2, ...\}$.

Corpul scalarilor va fi desemnat prin K (unde fie $K = \mathbb{R}$ ori $K = \mathbb{C}$).

Dacă X şi Y sunt spaţii vectoriale peste K, o aplicaţie $V : X \to Y$ se numeşte liniară (respectiv antiliniară) dacă

$$V(\alpha x + \beta y) = \alpha V(x) + \beta V(y)$$

(respectiv

$$V(\alpha x + \beta y) = \overline{\alpha} V(x) + \overline{\beta} V(y))$$

pentru orice α, β în K şi orice x, y în X.

O aplicaţie $B : X \times Y \to K$ se numeşte seschiliniară dacă

$$\begin{array}{rcl} B(\alpha x + \beta x', y) & = & \alpha B(x, y) + \beta B(x', y) \\ B(x, \alpha y + \beta y') & = & \overline{\alpha} B(x, y) + \overline{\beta} B(x, y') \end{array},$$

pentru orice α, β în K, orice x, x' în X şi orice y, y' în Y.

Fie (X, d) un spaţiu metric. O funcţie $f : X \to X$ se numeşte contracţie dacă există un număr $\alpha \in [0, 1)$ (numit factorul de contracţie al lui f) cu proprietatea că $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$, pentru orice x şi y din X.

Principiul contracţiei (Banach-Caccioppoli-Picard)

Fie (X, d) un spaţiu metric complet (în particular, X poate fi o submulţime închisă a unui spaţiu metric complet) şi $f : X \to X$ o contracţie. Atunci, f are un unic punct fix x^*. Punctul x^* poate fi obţinut astfel: pentru un punct arbitrar $x_o \in X$, se formează şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, dat prin $x_{n+1} = f(x_n)$. Atunci $\lim\limits_n x_n = x^*$.

Viteza de convergenţă a şirului $(x_n)_n$ este dată de inegalitatea, valabilă pentru orice $n = 0, 1, \ldots$

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0).$$

Aici α este factorul de contracţie al lui f.

Pentru două spaţii normate $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$, vom nota

$$\mathcal{L}(X, Y) := \{V : X \to Y \mid V \text{ este liniară şi continuă}\}$$

(în cazul $X = Y$, vom scrie, mai simplu, $\mathcal{L}(X)$ în loc de $\mathcal{L}(X, X)$). Atunci $\mathcal{L}(X, Y)$ devine un spaţiu normat cu norma uzuală definită, pentru orice $V \in \mathcal{L}(X, Y)$, prin

$$\|V\|_0 := \sup\{\|V(x)\|_Y \mid x \in X, \ \|x\|_X \leq 1\}$$

(in cazul în care Y este un spaţiu Banach şi spaţiul $\mathcal{L}(X, Y)$ va fi, de asemenea, pentru norma menţionată, tot un spaţiu Banach).

Pentru $Y = K$, vom nota $\mathcal{L}(X, K) = X'$ = dualul lui X. Este clar că pentru o aplicaţie liniară $V : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ are loc echivalenţa: V este izometrie $\Longleftrightarrow \|V(x)\|_Y = \|x\|_X$ pentru orice $x \in X$. O aplicaţie $V : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ este un izomorfism liniar si izometric dacă V este bijectivă, liniară şi izometrică.

Dacă X, Y sunt două spaţii Banach peste K, iar $R : X \to Y$ este un operator liniar şi continuu, vom nota cu $R' : Y' \to X'$ *adjunctul* său definit prin

$$R'(y') = y' \circ R.$$

Se arată că şi R' este tot un operator liniar şi continuu. În plus, $\|R'\|_o = \|R\|_o$.

Dacă $f : T \to (X, \|\cdot\|_X)$ vom considera şi funcţia

$$|f| : T \to \mathbb{R}_+$$

definită prin

$$|f|(t) := \|f(t)\|_X \ ,$$

pentru orice $t \in T$.

Dacă X este un spaţiu normat, topologia *slabă* pe X, notată cu $\sigma(X, X')$, este topologia local convexă (separată) pe X, generată de familia de seminorme $(p_{x'})_{x' \in X'}$, dată astfel: pentru orice $x' \in X'$ şi $x \in X$,

$$p_{x'}(x) := |x'(x)| \ .$$

Topologia *slabă** pe X', notată cu $\sigma(X', X)$, este topologia local convexă (separată) pe X', generată de familia de seminorme $(p_x)_{x \in X}$, dată după cum urmează: pentru orice $x' \in X'$ şi $x \in X$,

$$p_x(x') := |x'(x)| \ .$$

Vom formula în continuare două rezultate importante relativ la topologia $*-$ *slaba*, $\sigma(X', X)$, unde X este un spaţiu Banach:

Teorema 1.0.1. *(Alaoglu) Pentru orice $a > 0$, bila închisă*

$$B_a[X'] := \{x' \in X' \mid \ \|x'\|_0 \leq a\}$$

este ***slab**** *compactă (i.e. compactă în topologia $\sigma(X', X)$).*

Teorema 1.0.2. *(de metrizabilitate). Pentru orice $a > 0$, bila închisă $B_a[X']$ este metrizabilă, pentru topologia indusă de $\sigma(X', X)$, dacă şi numai dacă spaţiul $(X, \|\cdot\|_X)$ este separabil.*

În acest caz, o metrică pe $B_a[X']$, compatibilă cu topologia $\sigma(X', X)$ pe $B_a[X']$, poate fi definită astfel:

$$\rho(x', y') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|(x' - y')(x_n)|}{1 + |(x' - y')(x_n)|},$$

unde $(x_n)_n$ este un şir dens în X.

□

2 Sisteme iterative generalizate de tip Cantor

2.1 Preliminarii

Vom nota prin $\mathbb{R}$ mulţimea numerelor reale şi prin $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$.

Vom considera un număr natural $2 \leq w \in \mathbb{N}$ şi vom nota $X = \{0, 1, \ldots, w-1\}$ (în cazul în care $w = 2$, avem $X = \{0, 1\}$).

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ fixat, mulţimea X^n este total ordonată prin relaţia de ordine lexicografică $\leq$ dată prin:

> dacă $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sunt din X^n, atunci $x \leq y$, $x \neq y$ înseamnă: $x_1 < y_1$ sau (în cazul $n > 1$) $x_1 = y_1$ şi $x_j < y_j$, unde $j = \min\{i \mid x_i \neq y_i\}$.

Observăm că, pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$ astfel încât $x \neq (w-1, w-1, \ldots, w-1)$, succesorul $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ al lui x (adică cel mai mic $y \in X^n$ astfel încât $x \leq y$, $y \neq x$) este format utilizând regula „adunării modulo w".

Astfel, dacă vom considera numărul

$$N(x) = x_1 w^{n-1} + x_2 w^{n-2} + \ldots + x_{n-1} w + x_n$$

(reprezentat în baza w) şi reprezentăm în baza w şi numărul

$$N(x) + 1 = x'_1 w^{n-1} + x'_2 w^{n-2} + \ldots + x'_{n-1} w + x'_n,$$

vom avea, în mod simbolic:

$$(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (0, 0, \ldots, 0, 1).$$

Ca exemplu, luând $w = 2$, $n = 3$, ordonăm $X^3 = \{0, 1\}^3$ după cum urmează:

$$(0,0,0) \leq (0,0,1) \leq (0,1,0) \leq (0,1,1) \leq (1,0,0) \leq (1,0,1) \leq (1,1,0) \leq (1,1,1).$$

De obicei, vom nota (pentru $n \in \mathbb{N}^*$) elementele lui X^n după cum urmează:

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots . \alpha_{n-1}).$$

Considerăm, de asemenea, mulţimea

$$X^* = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X^n \right) \cup \{v\}.$$

Elementele lui X^* se numesc *cuvinte*, iar v este *cuvântul vid* (definit simbolic prin $\{v\} = X^0$). Lungimea unui cuvânt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sau $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ este $l(x) = n$ (sau $l(\alpha) = n$). Vom defini $l(v) = 0$.

Pentru orice $x, y \in X^*$, definim $xy \in X^*$ prin: $xy = x$ (dacă $y = v$), $xy = y$ (dacă $x = v$) şi $xy = (x_1 x_2 \ldots x_m y_1 y_2 \ldots y_n)$, dacă $v \neq x = (x_1 x_2 \ldots x_m)$, $v \neq y = (y_1 y_2 \ldots y_n)$.
În toate cazurile, $l(xy) = l(x) + l(y)$.

Pentru orice $v \neq x = (x_1 x_2 \ldots x_n) \in X^n = \{0, 1\}^n$, definim $|x| = \sum_{i=1}^{n} x_i$ (numărul termenilor $x_i = 1$).

Definim X^∞ după cum urmează:

$$X^\infty = \left\{ (x_1 x_2 \ldots x_n \ldots) \,\middle|\, x_i \in X \right\}.$$

Mai precis, X^∞ este mulţimea şirurilor $x = (x_1 x_2 \ldots x_n \ldots)$ cu elemente $x_i \in X$. Elementele lui X^∞ se vor numi *coduri* şi X^∞ este denumit *spaţiul codurilor*.

Pentru orice $x = (x_1 x_2 \ldots x_n \ldots) \in X^\infty$ şi orice $n \in \mathbb{N}^*$, definim

$$|x|_n = (x_1 x_2 \ldots x_n).$$

Pentru orice $u \in X^*$ şi $x = (x_1 x_2 \ldots x_n \ldots) \in X^\infty$, definim $ux \in X^\infty$ după cum urmează: dacă $u \neq v$, $u = (u_1 u_2 \ldots u_m)$, avem $ux = (u_1 u_2 \ldots u_m x_1 x_2 \ldots x_n \ldots)$ şi dacă $u = v$, avem $ux = x$.

Pentru orice $k \in X$, vom considera funcţia $F_k : X^\infty \to X^\infty$, definită prin:

$$F_k (x_1 x_2 \ldots x_n \ldots) = (k x_1 x_2 \ldots x_n \ldots).$$

Mai general, vom defini $F_u : X^\infty \to X^\infty$, pentru orice $u \in X^*$, prin

$$F_u = F_{u_1} \circ F_{u_2} \circ \ldots F_{u_m},$$

adică $F_u (x_1 x_2 \ldots x_n \ldots) = u_1 u_2 \ldots u_m x_1 x_2 \ldots x_n \ldots$ dacă $u = (u_1 u_2 \ldots u_m) \neq v$ şi $F_v = 1_{X^\infty}$. Aici $1_{X^\infty} : X^\infty \to X^\infty$ este funcţia identitate, anume $1_{X^\infty}(x) = x$, pentru orice $x \in X^\infty$.

Dacă (Y, δ) este un spaţiu metric şi $f : Y \to Y$, vom spune că f este lipschitziană dacă există un număr $M > 0$ astfel încât $\delta(f(x), f(y)) \leq M \cdot \delta(x, y)$ pentru orice $x, y \in Y$.

Această condiţie este echivalentă cu condiţia

$$||f||_L = \sup \left\{ \frac{\delta(f(x), f(y))}{\delta(x, y)} \,\middle|\, x, y \in Y,\ x \neq y \right\} < \infty.$$

În cazul în care $||f||_L < 1$, spunem că f este *o contracţie* şi $||f||_L$ este *factorul de contracţie* al lui f.

Pentru $\emptyset \neq A \subset Y$, *diametrul lui* A este

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{\delta(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

Principiul contracţiei (principiul Banach-Caccioppoli-Picard) afirmă că, în cazul în care (Y, δ) este complet (condiţie implicată de Y compact) şi $f : Y \to Y$ este o contracţie, atunci f are un unic *punct fix* $x^* \in Y$ (adică $f(x^*) = x^*$).

Vom considera spaţiul metric compact (X^∞, d), înzestrat cu metrica d dată prin

$$d\left(x = (x_1 x_2 \ldots x_n \ldots), y = (y_1 y_2 \ldots y_n \ldots)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |x_n - y_n|.$$

Topologia lui (X^∞, d) este chiar topologia produs pe $X^\infty = X^{\mathbb{N}^*}$ (fiecare factor X este înzestrat cu topologia discretă), prin urmare convergenţa în X^∞ este pe componente:

dacă $x^n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_k^n, \ldots)$ şi $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots)$ sunt şiruri din X^∞, atunci

$$x^n \underset{n}{\to} y \Leftrightarrow x_k^n \underset{n}{\to} y_k, \text{ pentru orice } k,$$

ceea ce este echivalent cu faptul că, pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$, există $n(p) \in \mathbb{N}^*$ astfel încât, dacă $n \geq n(p)$, atunci $x_1^n = y_1$, $x_2^n = y_2$, $\ldots$, $x_p^n = y_p$.

Observăm, de asemenea, că X^∞ cu topologia produs este *total disconectată*, adică singurele componente conexe sunt singletone-urile (mulţimile punctuale).

Pentru orice $k \in X$, $F_k : X^\infty \to X^\infty$ este o contracţie, anume $d(F_k(x), F_k(y)) = \frac{1}{2} d(x, y)$, pentru orice $x, y \in X^\infty$.

În expunerea noastră ulterioară, vom considera (T, δ) *un spaţiu metric compact.*

Fie

$$\mathcal{K}(T) = \{H \subset T \mid H \neq \phi \text{ şi } H \text{ compactă}\}.$$

Pe $\mathcal{K}(T)$ vom defini metrica Hausdorff-Pompeiu h, a cărei definiţie o reamintim.

Pentru orice $x \in T$ şi $\emptyset \neq H \subset T$, definim

$$\operatorname{dist}(x, H) = \inf\{\delta(x,h) \mid h \in H\}.$$

Atunci, pentru orice $\emptyset \neq H \subset T$, $\emptyset \neq G \subset T$, definim

$$(H,G)_\delta = \sup\{\operatorname{dist}(h,G) \mid h \in H\}.$$

În fine, metrica *Hausdorff-Pompeiu* $h : \mathcal{K}(T) \times \mathcal{K}(T) \to [0,\infty)$ este definită prin

$$h(U,V) = \max\left((U,V)_\delta, (V,U)_\delta\right).$$

Ştim că $(\mathcal{K}(T), h)$ este un spaţiu metric compact.

Mulţimile boreliene ale lui T vor fi notate prin $\mathcal{B}(T)$. Măsura Lebesgue pe $[0,1]$ este

$$L : \mathcal{B}([0,1]) \to [0,\infty).$$

Măsurile de probabilitate pe T le vom nota prin P(T). Anume,

$$\mathrm{P(T)} := \{\lambda : \mathcal{B}(T) \to [0;\infty) \mid \lambda \,\text{este}\ \sigma-\textit{aditivă şi}\ \lambda(T) = 1\}.$$

Bineînţeles, $L \in \mathrm{P}([0;1])$. Simbolul $\mathrm{P}\left(\mathrm{X}^\infty\right)$ este clar. Ca de obicei, vom spune că o măsură ($\sigma-$aditivă)

$$\lambda : \mathcal{B}([0,1]) \to [0,\infty)$$

este singulară dacă $L(\operatorname{supp}\lambda) = 0$, unde $\operatorname{supp}(\lambda)$ este suportul lui λ.

Pe P(T) vom defini metrica Hutchinson (sau metrica Kantorovich - Rubinstein)

$$d_H : \mathrm{P(T)} \times \mathrm{P(T)} \to \mathbb{R}_+,$$

prin:

$$d_H(\lambda,\nu) := \sup\left\{\left|\int \varphi \mathrm{d}\lambda - \int \varphi \mathrm{d}\nu\right| \middle| \varphi : T \to \mathbb{R},\ ||\varphi||_L \leq 1\right\}.$$

Este cunoscut faptul că spaţiul metric $(\mathrm{P(T)}, d_H)$ este compact (deci complet).

Presupunem că (S,ρ) este un alt spaţiu metric compact şi $\varphi : S \to T$ este o funcţie continuă.

Apoi, pentru orice $\nu \in \mathrm{P(S)}$, putem defini $\varphi(\nu) \in \mathrm{P(T)}$, anume $\varphi(\nu) : \mathcal{B}(T) \to [0,1]$ acţionează prin $\varphi(\nu)(B) = \nu\left(\varphi^{-1}(B)\right)$ (numim $\varphi(\nu)$ transportata lui ν).

Este valabilă o formulă de schimbare de variabilă: pentru orice funcţie continuă $f : T \to \mathbb{R}$ avem

$$\int f \mathrm{d}(\varphi(\nu)) = \int (f \circ \varphi) \mathrm{d}\nu.$$

Din nou, fie (T,δ) un spaţiu metric compact. Dacă $f_0 : T \to T$, $f_1 : T \to T$, $\ldots$,$f_{w-1} : T \to T$ sunt contracţii, vom spune că $(f_0, f_1, ..., f_{w-1})$ este un sistem iterativ de funcţii (pe scurt, un IFS), pe T. Un asemenea IFS generează contracţia lui Hutchinson, $\mathrm{F} : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{K}(T)$, definită prin:

$$\mathrm{F}(H) = \bigcup_{i=0}^{w-1} f_i(H).$$

(F este o contracţie, cu factorul de contracţie mai mic sau egal cu $\max\limits_{i=0}^{w-1} \|f_i\|_L$, unde $\mathcal{K}(T)$ este înzestrat cu metrica Hausdorff - Pompeiu.)

În consecinţă, există un unic punct fix H^* al lui F, adică $H^* = \bigcup\limits_{i=0}^{w-1} f_i(H^*)$.

Numim H^* mulţimea invariantă sau atractorul lui F.

Vom spune că $IFS-$ ul satisface *condiţia mulţimii deschise* dacă există o mulţime deschisă şi nevidă $D \subset T$ astfel încât: $f_i(D) \cap f_j(D) = \emptyset$, pentru $i \neq j$ şi

$$\bigcup_{i=0}^{w-1} f_i(D) \subset D.$$

În cazul în care $T \subset \mathbb{R}^n$ (pentru un $n \in \mathbb{N}^*$), toate f_i sunt *similarităţi* (adică fiecare f_i este de forma $f_i(x) = a_i + r_i V_i(x)$, unde $a_i \in \mathbb{R}^n$, $V_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este liniară şi izometrică pentru norma euclidiană şi $0 < r_i < 1$) şi IFS-ul satisface condiţia mulţimii deschise, dimensiunea Hausdorff „s“ a atractorului H^* este dată prin relaţia

$$\sum_{i=0}^{w-1} r_i^s = 1.$$

Avem IFS-ul canonic pe spaţiul codurilor, $(F_0, F_1, \ldots, F_{w-1})$, cu atractorul X^∞.

Se consideră un IFS general pe spaţiul T, anume $(f_0, f_1, \ldots, f_{w-1})$, cu atractorul A. În restul paragrafului, A va avea acest sens. Menţionăm că în paragraful următor A va avea un sens precizat acolo.

Pentru orice cuvânt $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ cu $l(\alpha) = n \in \mathbb{N}^*$, considerăm funcţia $f_\alpha = f_{\alpha_0} \circ f_{\alpha_1} \circ \ldots \circ f_{\alpha_{n-1}}$ şi scriem

$$I(\alpha) := f_\alpha(T)$$

(de exemplu, dacă $\alpha = (0)$, avem $f_{(0)} = f_0$).

Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in X^n$ şi $k \in X$, vom avea

$$I(\alpha k) \subset I(\alpha).$$

Considerând
$$\begin{aligned} C_1 &= \mathrm{F}(T) = \bigcup_{i=0}^{w-1} f_i(T), \\ C_2 &= \mathrm{F}^2(T) = \mathrm{F}\left(\mathrm{F}(T)\right) = \bigcup_{u \in X^2} f_u(T), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n &= \mathrm{F}^n(T) = \bigcup_{u \in X^n} f_u(T), \end{aligned}$$

observăm că $C_{n+1} \subset C_n$ şi de aceea (deoarece teoria generală afirmă că $A = \lim\limits_n C_n$, în metrica Hausdorff-Pompeiu), vom avea

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Surjecţia canonică $\pi : X^\infty \to A$ este definită prin $\pi(x) = t$, unde

$$\{t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_{|x|_n}(T).$$

Putem folosi această definiţie deoarece T este compact:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} f_{|x|_n}(T) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_{|x|_n}(A).$$

În general, π nu este o bijecţie.

Presupunând că are loc condiţia $(\mathcal{C})$, π devine o bijecţie, deci π este un homeomorfism (în consecinţă, A este total disconectată).

Aici, Condiţia $(\mathcal{C})$ presupune următoarele două condiţii:

(i) Toate aplicaţiile f_i sunt injective.

(ii) Pentru orice $i \neq j$, avem $f_i(T) \cap f_j(T) = \emptyset$.

Observăm că, dacă avem îndeplinită condiţia $(\mathcal{C})$, atunci

$$(v \neq \alpha \neq \beta \neq v \text{ în } X^* \text{ şi } l(\alpha) = l(\beta)) \Rightarrow f_\alpha(T) \cap f_\beta(T) = \emptyset.$$

Definim, de asemenea, $\overline{\pi} : X^\infty \to T$, prin $\overline{\pi}(x) = \pi(x)$.

Pentru orice $k \in X$, fie $\overline{f_k} : A \to A$ definită prin $\overline{f_k}(t) = f_k(t)$ (bine definită, deoarece $\bigcup_{k=0}^{w-1} f_k(A) = A$) şi, de asemenea, fie $\overline{f_\alpha} : A \to A$ definită prin

$$\overline{f_\alpha}(t) = f_\alpha(t),$$

pentru orice $\alpha \in X^* \setminus \{v\}$.

Obţinem următoarele diagrame comutative (pentru orice $k \in X$):

$$\begin{array}{ccc} X^\infty & \overset{F_k}{\to} & X^\infty \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ A & \underset{\overline{f_k}}{\to} & A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X^\infty & \overset{F_k}{\to} & X^\infty \\ \overline{\pi} \downarrow & & \downarrow \overline{\pi} \\ T & \underset{f_k}{\to} & T \end{array} ,$$

Mai general, pentru orice $\alpha \in X^* \setminus \{v\}$, avem următoarele diagrame comutative :

$$\begin{array}{ccc} X^\infty & \overset{F_\alpha}{\to} & X^\infty \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ A & \underset{\overline{f_\alpha}}{\to} & A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X^\infty & \overset{F_\alpha}{\to} & X^\infty \\ \overline{\pi} \downarrow & & \downarrow \overline{\pi} \\ T & \underset{f_\alpha}{\to} & T \end{array} .$$

Partea finală a acestor preliminarii se ocupă de sisteme iterative de funcţii cu probabilităţi şi de măsuri invariante.

Fie $(f_0, f_1, \ldots, f_{w-1})$ un sistem iterativ de funcţii pe T. Fie, de asemenea, $p_0, p_1, ..., p_{w-1} > 0$ astfel încât

$$\sum_{i=0}^{w-1} p_i = 1.$$

Atunci $(f_0, f_1, ..., f_{w-1}; p_0, p_1, ..., p_{w-1})$ se numeşte *sistem iterativ de funcţii cu probabilităţi* (IFS cu probabilităţi sau IFS$_p$).

Aceasta ne va permite să definim operatorul Markov

$$E_p : \mathrm{P(T)} \to \mathrm{P(T)} \text{ prin}$$
$$E_p(\nu) = \sum_{i=0}^{w-1} p_i f_i(\nu).$$

Aici $f_i(\nu)$ este măsura transportată, definită astfel: $f_i(\nu) \in \mathrm{P(T)}$, $f_i(\nu) = \nu\left(f_i^{-1}(B)\right)$,pentru orice $B \in \mathcal{B}(T)$.

Atunci, privind P(T) înzestrat cu metrica d_H, ştim din teoria generală că E_p este o contracţie cu factorul de contracţie mai mic sau egal cu

$$\sum_{i=0}^{w-1} p_i \left\| f_i \right\|_L .$$

Astfel, E_p are unic punct fix ν_0 (numim pe ν_0 măsura invariantă): $E_p(\nu_0) = \nu_0$.

Aceasta înseamnă că, pentru orice $B \in \mathcal{B}(T)$ avem:

$$\nu_0(B) = \sum_{i=0}^{w-1} p_i \nu_0 \left(f_i^{-1}(B)\right).$$

Ştim, de asemenea, că $\operatorname{supp}(\nu_0) = A$.

Ca un caz particular, considerăm IFS$_p$-ul

$$(F_0, F_1, \ldots, F_{w-1}; p_0, p_1, \ldots, p_{w-1}) \quad \text{pe} \quad X^\infty.$$

Măsura invariantă în acest caz (numită măsura Bernoulli) este unica măsură $\mu : \mathcal{B}(X^\infty) \to [0;\infty)$ cu proprietatea că, pentru orice $\alpha \in X^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ avem

$$\mu\left(F_\alpha\left(X^\infty\right)\right) = \mu\left(\alpha X^\infty\right) = p_{\alpha_0} p_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_{\alpha_{n-1}},$$

dacă $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ (şi, bineînţeles, $\mu\left(X^\infty\right) = 1$).

În cele ce urmează, vom nota prin μ această măsură.

Putem defini

$$\pi(\mu) : \mathcal{B}(A) \to [0;\infty) \text{ şi}$$
$$\overline{\pi}(\mu) : \mathcal{B}(T) \to [0;\infty).$$

Teoria generală afirmă că, scriind $\lambda_0 := \pi(\mu)$, avem că λ_0 este măsură invariantă, adică pentru orice $B \in \mathcal{B}(A)$ avem

$$\lambda_0(B) = \sum_{i=0}^{w-1} p_i \overline{f_i}\left(\lambda_0\right)(B) = \sum_{i=0}^{w-1} p_i \lambda_0\left(\left(\overline{f_i}\right)^{-1}(B)\right). \tag{$*$}$$

şi $\operatorname{supp}(\lambda_0) = A$.

Să notăm cu $\overline{\pi}(\mu) = \lambda$. Vom vedea că au loc afirmaţiile:

A1) $$\lambda(B) = \lambda_0(B),\ \forall B \in \mathcal{B}(A) \text{ (evident);}$$

A2) $$\lambda = \nu_0 \text{ (măsura invariantă).}$$

Datorită unicităţii, pentru a dovedi A2) trebuie să dovedim că λ este invariantă, adică $\forall\, B \in \mathcal{B}(T)$ avem

$$\lambda(B) = \sum_{i=0}^{w-1} p_i f_i(\lambda)(B) = \sum_{i=0}^{w-1} p_i \lambda\left(f_i^{-1}(B)\right). \tag{$**$}$$

Într-adevăr, observăm că pentru orice $B \in \mathcal{B}(T)$ (cu prima afirmaţie)

$$\lambda(B) = \lambda(B \cap A) = \lambda_0(B \cap A) \tag{Rem}$$

Pentru a vedea aceasta:

$$\lambda(B) = \overline{\pi}(\mu)(B) = \mu\left(\left(\overline{\pi}\right)^{-1}(B)\right) = \mu\left(\left(\overline{\pi}\right)^{-1}(B \cap A)\right) =$$

(datorită faptului că $\overline{\pi}(T) = \pi(T) = A$)

$$= \mu\left(\pi^{-1}(B \cap A)\right) = \pi(\mu)(B \cap A) = \lambda_0(B \cap A).$$

Folosind acest ultim rezultat, revenim la rezultatul $(**)$, utilizând şi rezultatul $(*)$:

$$\lambda(B) = \lambda_0(B \cap A) = \sum_{i=0}^{w-1} p_i \overline{f_i}\left(\lambda_0\right)(B \cap A) = \sum_{i=0}^{w-1} p_i \lambda_0\left(\left(\overline{f_i}\right)^{-1}(B \cap A)\right) = \sum_{i=0}^{w-1} p_i \lambda_0\left(f_i^{-1}(B) \cap A\right).$$

Ultima egalitate este adevărată, deoarece

$$\left(\overline{f_i}\right)^{-1}(B \cap A) = f_i^{-1}(B) \cap A.$$

Demonstrăm această egalitate de mulţimi astfel:

În primul rând, dacă $x \in \left(\overline{f_i}\right)^{-1}(B \cap A)$, atunci $x \in A$ = domeniul de definiţie al lui $\overline{f_i}$ şi $\overline{f_i}(x) \in B \cap A$, deci $x \in A$ şi $f_i(x) \in B$. Reciproc, dacă $x \in f_i^{-1}(B) \cap A$, atunci $x \in A$ şi $f_i(x) = \overline{f_i}(x) \in B$, deci $\overline{f_i}(x) \in B \cap A$, deoarece $f_i(A) \subset A$.

Astfel, din A1) şi (Rem), obţinem

$$\lambda(B) = \sum_{i=0}^{w-1} p_i \lambda\left(f_i^{-1}(B) \cap A\right) = \sum_{i=0}^{w-1} p_i \lambda\left(f_i^{-1}(B)\right),$$

care este $(**)$.

În cele ce urmează, λ va fi întotdeauna simbolul pentru ν_0 (măsura invariantă) şi vom ţine cont de faptul că $\lambda = \overline{\pi}(\mu)$.

Teorema 2.1.1. *Presupunem că are loc Condiţia (C). Atunci, $\forall\, v \neq \alpha \in X^*$ avem:*

$$\lambda(I(\alpha)) = \mu\left(F_\alpha\left(X^\infty\right)\right) = \mu\left(\alpha X^\infty\right) = p_{\alpha_0} \cdot p_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_{\alpha_{n-1}},$$

dacă $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$.

În particular, dacă $w = 2$, avem

$$\lambda(I(\alpha)) = p_0^{n-|\alpha|} p_1^{|\alpha|}.$$

2.2 Mulţimea invariantă

Cadrul general al acestui paragraf şi al următoarelor paragrafe va fi următorul:

$w = 2$, deci $X = \{0, 1\}$; $T = [0, 1]$.

Să fixăm $0 < \theta \leq \frac{1}{2}$. Vom lucra cu contracţiile strict crescatoare (cu factorul de contracţie θ):

$$f_0 : [0; 1] \to [0; 1], \quad f_0(t) = \theta t$$
$$f_1 : [0; 1] \to [0; 1], \quad f_1(t) = 1 - \theta + \theta t.$$

Astfel, ne va preocupa IFS-ul $\mathcal{F} = (f_0, f_1)$, cu mulţimea invariantă (atractorul) A.

Înainte de a merge mai departe, să remarcăm diferenţa dramatică între cazurile $0 < \theta < \frac{1}{2}$ şi cazul $\theta = \frac{1}{2}$. Astfel, în primul caz avem $\theta < 1 - \theta$, de aceea

$$I(0) = f_0([0, 1]) = [0, \theta], \qquad I(1) = f_1([0, 1]) = [1 - \theta, 1]$$

şi $I(0) \cap I(1) = \emptyset$.

Astfel, în acest caz π este un homeomorfism şi A este total disconectată.

În cazul al doilea, avem $\theta = 1 - \theta = \frac{1}{2}$, de aceea

$$I(0) = \left[0, \frac{1}{2}\right], \qquad I(1) = \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Este uşor de remarcat că, în acest caz, $A = [0, 1]$.

În general, în acest caz π nu este o injecţie (va urma şi un exemplu concret).

Mulţimea Cantor clasică C se obţine în cazul $\theta = \dfrac{1}{3}$ (anume $C = A$ pentru $\theta = \dfrac{1}{3}$).

Am vrea să descriem structura concretă a lui A în cazul $0 < \theta < \dfrac{1}{2}$. Urmează câţiva paşi necesari preliminari. Lema 2.2.1 este valabilă pentru $\theta = \dfrac{1}{2}$, de asemenea.

Lema 2.2.1. *Pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$ *şi orice* $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \{0,1\}^n$ *avem:*

$$I(\alpha) = \left[(1-\theta)\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \theta^i, \left((1-\theta)\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \theta^i\right) + \theta^n\right].$$

Lema 2.2.2. *Fie* $n \in \mathbb{N}^*$, $(1,1,1,\ldots,1) \neq \alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \{0,1\}^n$ *şi* $\alpha' = \left(\alpha'_0, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{n-1}\right)$ *succesorul lui* α.

Atunci:

1. Pentru orice $0 < \theta < \dfrac{1}{2}$, *avem:*

$$(1-\theta)\left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \theta^i\right) + \theta^n < (1-\theta)\sum_{i=0}^{n-1} \alpha'_i \theta^i.$$

2. Pentru $\theta = \dfrac{1}{2}$, *avem:*

$$(1-\theta)\left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \theta^i\right) + \theta^n = (1-\theta)\sum_{i=0}^{n-1} \alpha'_i \theta^i.$$

Remarcăm că partea din stânga a inegalităţii din Lema 2.2.2 este exact capătul din dreapta al intervalului $I(\alpha)$, în vreme ce partea dreaptă a aceleiaşi inegalităţi este exact capătul din stânga al intervalului $I(\alpha')$.

Prin urmare, pentru $0 < \theta < \dfrac{1}{2}$, dacă $I(\alpha) = [a,b]$ şi $I(\alpha') = [A,B]$, avem $b < A$ (o asemenea situaţie va fi notată prin $[a,b] < [A,B]$). De aceea, cele 2^n intervale $I(\alpha)$, când α parcurge $\{0,1\}^n$, vor fi disjuncte, fiind poziţionate în „ordine ascendentă" după cum urmează:

$$[a_1, b_1] < [a_2, b_2] < \ldots < [a_{2^n}, b_{2^n}],$$

unde $[a_1, b_1] = I(0,0,\ldots,0)$, $[a_2, b_2] = I(0,0,\ldots,0,1)$, $[a_3, b_3] = I(0,0,\ldots,0,1,0)$, $\ldots$, $[a_{2^n}, b_{2^n}] = I(1,1,\ldots,1)$.

Mai precis, dacă $[a_i, b_i] = I(\alpha)$, atunci $[a_{i+1}, b_{i+1}] = I(\alpha')$.

De aceea, luând acest rezultat în considerare, vom vedea că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem

$$C_n = \bigcup_{l(\alpha)=n} I(\alpha),$$

ceea ce conduce la $L(C_n) = 2^n \cdot \theta^n = \left(\dfrac{\theta}{1/2}\right)^n \underset{n}{\to} 0$.

Cum $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n$,vom avea $L(A) = 0$. Am obţinut astfel:

Lema 2.2.3. *Presupunem că* $0 < \theta < \dfrac{1}{2}$.*Mulţimea* A *este nevidă, compactă, homeomorfă cu* $X^\infty = \{0,1\}^\infty$ *(deci total disconectată) şi* $L(A) = 0$.

Atunci $[0,1] \setminus A$ *este densă în* $[0,1]$.

În cazul $\theta = \dfrac{1}{2}$ avem $C_n = [0,1]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Aceasta implică, desigur, că $A = [0,1]$ în acest caz (aşa cum am văzut deja) şi face cazul $\theta = \dfrac{1}{2}$ trivial. În cazul $\theta = \dfrac{1}{2}$, surjecţia canonică nu este injecţie, deci nu este homeomorfism, deoarece, în acest caz, $A = [0,1]$, mulţime care nu este total disconectată.

Într-adevăr, aceasta este o consecinţă directă a Lemei 2.2.2, punctul 2 (capătul drept al lui $I(\alpha)$, adică partea stângă a egalităţii din Lema 2.2.2, coincide cu capătul stâng al noului interval $I(\alpha')$, adică partea dreaptă a egalităţii din Lema 2.2.2).

Să continuăm, pentru $0 < \theta < \dfrac{1}{2}$, analiza poziţionării intervalelor care alcătuiesc un C_n fixat, $n \in \mathbb{N}^*$.

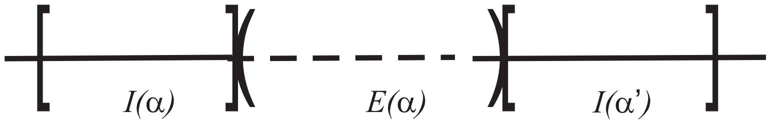
Avem

$$[0,1] - C_n = \bigcup_{\substack{l(\alpha)=n,\\ |\alpha| \le n-1}} E(\alpha),$$

unde, pentru orice $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ cu $|\alpha| \le n-1$, am definit mulţimea deschisă nevidă

$$E(\alpha) = \left(\left((1-\theta) \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \theta^i \right) + \theta^n,\ (1-\theta) \sum_{i=0}^{n-1} \alpha'_i \theta^i \right).$$

Astfel $E(\alpha)$ „este poziţionat între $I(\alpha)$ şi $I(\alpha')$“:

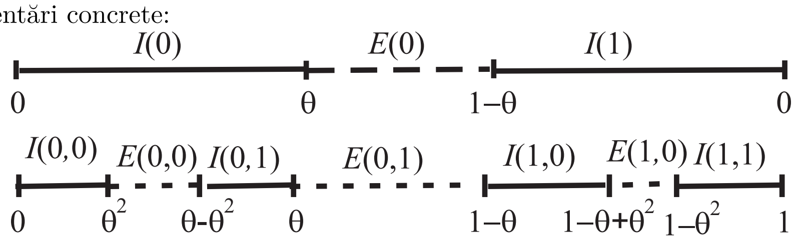


şi $[0,1] \setminus C_n$ apare ca fiind mulţimea deschisă care este reuniunea disjunctă a celor $2^n - 1$ mulţimi deschise $E(\alpha)$ ($l(\alpha) = n$, $\alpha \neq (1,1,\ldots,1)$).

Două reprezentări concrete:

$n = 1$

$n = 2$



Acum suntem pregătiţi să trecem la reprezentarea concretă a mulţimii invariante A.

Pentru aceasta, vom introduce mulţimea

$$M = \left\{ (1-\theta) \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \theta^i \mid \alpha_i \in \{0,1\} \right\} \subseteq [0,1].$$

Se observă că, pentru $\theta = \dfrac{1}{2}$, avem $M = [0,1]$ (reprezentarea diadică).

Pentru $\theta = \dfrac{1}{3}$, $M = C$ este mulţimea Cantor clasică (care este formată din toate numerele din $[0,1]$ a căror reprezentare în baza 3 conţine numai cifrele 0 şi 2).

Lema 2.2.4. *Mulţimea M este compactă (rezultat valabil şi pentru $\theta = \frac{1}{2}$).*

În continuare, vom introduce elementele „de tip finit“ din M, anume elementele mulţimii:

$$F = \left\{ (1-\theta) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \theta^i \mid \alpha_i \in \{0,1\},\, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

În mod evident,$F \subset M$.

Teorema 2.2.5. ***(Structura lui** A**).*** *Avem $A = M = \overline{F}$.*

Pentru orice $0 < \theta \leq \frac{1}{2}$, are loc condiţia mulţimii deschise, luând drept mulţime deschisă pe $G = (0,1)$.

Anume,

$$\begin{aligned} f_0(G) &= (0,\theta) \\ f_1(G) &= (1-\theta, 1) \end{aligned}$$

şi $f_0(G) \cap f_1(G) = \emptyset$, $f_0(G) \cup f_1(G) \subset G$.

În consecinţă, putem calcula dimensiunea Hausdorff, s, a atractorului A, folosind formula

$$\theta^s + \theta^s = 1,$$

adică $s = -\dfrac{\ln 2}{\ln \theta}$.

În cazul $\theta = \frac{1}{3}$, obţinem $s = \dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ (dimensiunea mulţimii lui Cantor).

În cazul $\theta = \frac{1}{2}$, obţinem $s = 1$ (dimensiunea lui $A = [0,1]$, ceea ce constituie o confirmare).

2.3 Măsura invariantă

Presupunem, pe lângă cadrul general, că avem numerele $0 < p_0 < 1$, $0 < p_1 < 1$ astfel încât

$$p_0 + p_1 = 1,$$

obţinând IFS$_p$-ul $\mathrm{F}_p = (f_0, f_1; p_0, p_1)$.

Măsura invariantă va fi notată cu λ, adică $\lambda = \nu_0$, v. Preliminarii. Astfel, vom avea că

$$\lambda : \mathcal{B}([0;1]) \to [0;1]$$

este unica măsură de probabilitate având proprietatea $\lambda = p_0 f_0(\lambda) + p_1 f_1(\lambda)$, adică, pentru orice $B \in \mathcal{B}(T) = \mathcal{B}([0,1])$:

$$\lambda(B) = p_0 \lambda\left(f_0^{-1}(B)\right) + p_1 \lambda\left(f_1^{-1}(B)\right). \tag{2.1}$$

Pentru a scrie într-un mod şi mai clar această ultimă egalitate, să considerăm o mulţime nevidă $B \in \mathcal{B}([0,1])$ şi un număr $a > 0$ şi să definim următoarele mulţimi:

$$\begin{aligned} aB &= \{at \mid t \in B\} \\ B + a &= \{t + a \mid t \in B\} = a + B \\ B - a &= \{t - a \mid t \in B\} = -a + B. \end{aligned}$$

Formula de invarianţă (2.1) devine

$$\lambda(B) = p_0\lambda\left(\left(\frac{1}{\theta}B\right) \cap [0;1]\right) + p_1\lambda\left(\left(\frac{1}{\theta}B - \frac{1-\theta}{\theta}\right) \cap [0;1]\right), \tag{2.2}$$

valida pentru orice $B \in \mathcal{B}([0;1])$.

În cazul $B = \emptyset$, toate mulţimile care apar în (2.2) sunt considerate a fi vide.

Ne reamintim, de asemenea,că supp$\lambda = A$.

Cazul $\theta = \dfrac{1}{2}$ merită o atenţie deosebită.

Avem:

Lema 2.3.1. *În cazul $\theta = \dfrac{1}{2}$, avem $\pi = \overline{\pi}$ dat prin $\pi : X^\infty \to [0,1]$*

$$\pi\left(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{2^i}.$$

Acum, putem prezenta:

Teorema 2.3.2. *Pentru orice $0 < \theta \leq \dfrac{1}{2}$ şi orice $\alpha = (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n) \in \{0,1\}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, avem:*

$$\lambda(I(\alpha)) = p_0^{n-|\alpha|} \cdot p_1^{|\alpha|}.$$

Vom reaminti pe scurt câteva date privind atomii unei măsuri.

Dacă $\mathcal{A}$ este un inel, iar $m : \mathcal{A} \to [0,\infty)$ este o măsură aditivă, un element $H \in \mathcal{A}$ se numeşte atom al lui m dacă $m(H) > 0$ şi pentru orice $\mathcal{A} \ni B \subset H$, avem fie $m(B) = m(H)$, fie $m(B) = 0$.

În cazul particular $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])$ şi $m : \mathcal{B}([0,1]) \to [0,\infty)$ este $\sigma-$aditivă, avem:

Lema 2.3.3. *Fie $m : \mathcal{B}([0,1]) \to [0,\infty)$ o măsură $\sigma-$aditivă. Dacă $\exists\, H$ un atom al lui m, atunci $\exists\, x \in [0,1]$ cu proprietatea că $m(\{x\}) > 0$ (şi, prin urmare, $\{x\}$ este atom al lui m).*

Folosind rezultatele anterioare, obţinem:

Teorema 2.3.4. *Măsura invariantă λ are următoarele proprietăţi:*

a) Pentru orice $x \in [0,1]$, avem $\lambda(\{x\}) = 0$, prin urmare, λ este non-atomică (nu are atomi).

b) Dacă $0 < \theta < \dfrac{1}{2}$, λ este singulară.

Măsura Lebesgue L poate fi obţinută ca măsură invariantă:

Lema 2.3.5. *Dacă $\theta = \dfrac{1}{2} = p_0 = p_1$, avem $\lambda = L$.*

Partea rămasă din acest paragraf este dedicată calculului lui $\lambda([0,a])$, pentru $0 < a < 1$.

Aceasta ne va permite să calculăm $\lambda(B)$ pentru orice $B \in \mathcal{B}([0,1])$. Într-adevăr, pentru orice $0 \leq a < b \leq 1$, avem

$$\lambda((a,b]) = \lambda([0,b]) - \lambda([0,a]) = \lambda([a,b)) = \lambda([a,b]) = \lambda((a,b)).$$

Intervalele de acest tip generează $\mathcal{B}([0,1])$ şi aceasta permite calculul (cel puţin din punct de vedere teoretic) al lui $\lambda(B)$,pentru orice $B \in \mathcal{B}([0,1])$.

Lema 2.3.6. *Pentru orice $\theta \leq a \leq 1-\theta$ şi $n \in \mathbb{N}$, avem*

$$\lambda\left([0, a\cdot\theta^n]\right) = p_0^{n+1}. \tag{2.3}$$

Remarcă. Pentru $\theta = \dfrac{1}{2}$, trebuie să avem $a = \dfrac{1}{2}$ şi (2.3) devine:

$$\lambda\left(\left[0, \theta^{n+1}\right]\right) = p_0^{n+1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Lema 2.3.7. *Fie* $1 - \theta \le a < b \le 1$. *Atunci*

$$\frac{1}{\theta}[a, b] - \frac{1-\theta}{\theta} \subset [0, 1]$$

şi, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, *avem*

$$\lambda\left(\theta^n [a, b]\right) = p_0^n p_1 \lambda\left(\left(\frac{1}{\theta}[a, b]\right) - \frac{1-\theta}{\theta}\right). \tag{2.4}$$

În cele ce urmează,vom folosi o formă alternativă a elementelor din M. Anume, un element $x \in M$ poate fi dat de una din formulele

$$x = (1-\theta) \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \theta^i \qquad (\text{dacă } x \in F)$$

sau

$$x = (1-\theta) \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \theta^i \qquad (\text{infinit de mulţi } \alpha_i = 1).$$

Alternativ (pentru x nenul):
– dacă $x \in F$, atunci
$x = (1-\theta) \cdot \theta^{n_1}$ sau
$x = (1-\theta)\left(\theta^{n_1} + \theta^{n_1+n_2} + \theta^{n_1+n_2+n_3} + \ldots + \theta^{n_1+\ldots+n_k}\right) =$
$= \theta^{n_1}(1-\theta)\left(1 + \theta^{n_2} + \theta^{n_2+n_3} + \ldots + \theta^{n_2+n_3+\ldots+n_k}\right),$
unde $n_1 \in \mathbb{N}$; $n_2, n_3, \ldots, n_k \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$;
– dacă $x \in M \setminus F$, atunci
$x = (1-\theta)\left(\theta^{n_1} + \theta^{n_1+n_2} + \ldots + \theta^{n_1+n_2+\ldots+n_k} + \ldots\right) =$
$= \theta^{n_1}(1-\theta)\left(1 + \theta^{n_2} + \theta^{n_2+n_3} + \ldots + \theta^{n_2+n_3+\ldots+n_k} + \ldots\right),$
unde $n_1 \in \mathbb{N}$; $n_2, n_3, \ldots, n_k \ldots \in \mathbb{N}^*$.

În toate cazurile: $x = \theta^{n_1} a$, unde $n_1 \in \mathbb{N}$ şi $1 - \theta \le a \le 1$, şi va fi posibil să aplicăm Lema 2.3.6 şi Lema 2.3.7 (adică relaţiile (2.3) şi (2.4)).

Lema 2.3.8. *Fie* $\mathbb{N} \ni m \ge 2$, $n_1 \in \mathbb{N}$ *şi* $n_2, n_3, \ldots, n_m \in \mathbb{N}^*$. *Atunci*

$$\lambda\left([a, b]\right) = p_0^{n_1+n_2+n_3+\ldots+n_m-(m-2)} \cdot p_1^{m-1},$$

unde

$$a = (1-\theta)\left(\theta^{n_1} + \theta^{n_1+n_2} + \ldots + \theta^{n_1+n_2+\ldots+n_{m-1}}\right),$$

$$b = (1-\theta)\left(\theta^{n_1} + \theta^{n_1+n_2} + \ldots + \theta^{n_1+n_2+\ldots+n_m}\right).$$

Acum putem calcula $\lambda([0, a])$ pentru $a \in M = A$.

Teorema 2.3.9. *Avem:*
a) $\lambda\left([0, (1-\theta) \cdot \theta^{n_1}]\right) = p_0^{n_1+1}$, *dacă* $n_1 \in \mathbb{N}$.
b) $\lambda\left([0, (1-\theta) \cdot (\theta^{n_1} + \theta^{n_1+n_2} + \ldots + \theta^{n_1+n_2+\ldots+n_m})]\right) =$
$= p_0^{n_1+1} + \displaystyle\sum_{h=0}^{m-2} p_0^{n_1+n_2+\ldots+n_{h+2}-h} \cdot p_1^{h+1}$, *dacă* $m \in \mathbb{N}$, $m \ge 2$, $n_1 \in \mathbb{N}$ *şi* $n_2, n_3, \ldots, n_m \in \mathbb{N}^*$.

c) $\lambda\left([0,(1-\theta)\cdot(\theta^{n_1}+\theta^{n_1+n_2}+\ldots+\theta^{n_1+n_2+\ldots+n_m}+\ldots)]\right)=$

$$=p_0^{n_1+1}+\sum_{h=0}^{\infty}p_0^{n_1+n_2+\ldots+n_{h+2}-h}\cdot p_1^{h+1},\ \textit{dacă } n_1\in\mathbb{N} \textit{ şi } n_2,n_3,\ldots,n_m,\ldots\in\mathbb{N}^*.$$

Teorema 2.3.10. *(Forma generală a surjecţiei canonice). Pentru orice* $0<\theta\leq\dfrac{1}{2}$ *şi orice* $\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\ldots)\in X^{\infty}$*, avem*

$$\pi(\alpha)=(1-\theta)\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i\theta^i.$$

2.4 Dependenţa de parametru

În acest paragraf vom studia dependenţa mulţimii invariante şi a măsurii invariante de parametrul $\theta\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$.

Observăm că teoria generală furnizează condiţii pentru dependenţa continuă de parametru. Vom dovedi mai mult, anume vom vedea că această dependenţă este lipschitziană.

A. Dependenţa de parametru a mulţimii invariante

Considerăm mulţimea

$$\mathcal{K}([0,1])=\{H\subset[0,1]|H\neq\emptyset, H \text{ este compactă}\},$$

înzestrată cu metrica Hausdorff-Pompeiu h.

Pentru orice $0<\theta\leq\dfrac{1}{2}$, considerăm (din nou) contracţiile

$$f_0^{\theta}:[0,1]\to[0,1], f_0^{\theta}(t)=\theta t$$

$$f_1^{\theta}:[0,1]\to[0,1], f_1^{\theta}(t)=(1-\theta)+\theta t,$$

şi IFS-ul $(f_0^{\theta},f_1^{\theta})$ are mulţimea invariantă A^{θ} (punctul fix al lui F^{θ}).

În acest moment putem considera

$$H\left(\left(0,\frac{1}{2}\right],\delta\right)\to(\mathcal{K}([0,1]),h),$$

dată prin $H(\theta)=A^{\theta}$. (Aici δ reprezintă metrica uzuală pe $\mathbb{R}$).

Vom vedea că H este lipschitziană. Pentru a demonstra aceasta, avem nevoie să demonstrăm câteva rezultate preliminare.

Afirmaţia 1

Să considerăm intervalele $I=[a,b]$ şi $J=[A,B]$ în $\mathcal{K}([0,1])$.

Atunci se observă, luând toate cazurile, că

$$h(I,J)=max\left(|a-A|,|b-B|\right).$$

Afirmaţia a 2-a

Fie $0<\theta_1<\theta_2\leq\dfrac{1}{2}$ şi $n\in\mathbb{N}^*$. Atunci

$$\theta_2^n-\theta_1^n>\theta_2^{n+1}-\theta_1^{n+1}.$$

Afirmaţia a 3-a(Consecinţă)

Dacă $0<\theta_1<\theta_2\leq\dfrac{1}{2}$ şi $n\in\mathbb{N},n\geq2$, avem

$$\theta_2-\theta_1>\theta_2^n-\theta_1^n.$$

Într-adevăr,

$$\theta_2^n - \theta_1^n < \theta_2^{n-1} - \theta_1^{n-1} < \theta_2^{n-2} - \theta_1^{n-2} < \cdots < \theta_2 - \theta_1.$$

Afirmaţia a 4-a

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi definim $\varphi : \left(0, \frac{1}{2}\right) \to \mathbb{R}$ prin $\varphi(x) = x^n(1-x)$. Atunci, pentru orice $0 < \theta_1 < \theta_2 < \frac{1}{2}$, avem:

$$0 < \varphi(\theta_2) - \varphi(\theta_1) < (\theta_2 - \theta_1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot n.$$

Afirmaţia este astfel demonstrată.

Acum suntem în masură să demonstrăm:

Teorema 2.4.1. *[Dependenţa Lipschitziană a Mulţimii Invariante]*

Aplicaţia H este lipschitziană. Anume, pentru orice $\theta_1, \theta_2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, avem

$$h(H(\theta_1), H(\theta_2)) \leq 6|\theta_1 - \theta_2|.$$

Remarcă. Teorema (2.4.1) arată că în metrica Hausdorff-Pompeiu convergenţa nu este destul de „tare“ să conserve proprietăţi importante. Astfel:

a) Dacă $0 < \theta < \frac{1}{2}$, toate A^θ au proprietatea de a fi total disconectate (anume, ele sunt toate homeomorfe cu X^∞).
   Acesta nu este cazul pentru $A^{\frac{1}{2}} = [0,1] = \lim\limits_{\theta \to \frac{1}{2}} A^\theta$.

b) Pentru orice $0 < \theta < \frac{1}{2}$, avem $L(A^\theta) = 0$, în vreme ce $L(A^{\frac{1}{2}}) = L([0,1]) = 1$.

B. Dependenţa de parametru a măsurii invariante

Considerăm mulţimea $\mathrm{P}([0,1])$ a tuturor măsurilor de probabilitate

$$\lambda : \mathcal{B}([0,1]) \to [0,1],$$

înzestrată cu metrica Hutchinson (sau Kantorovich - Rubinstein) d_H. Ne reamintim că, pentru $\mu, \nu \in \mathrm{P}([0,1])$, avem

$$d_H(\mu,\nu) = sup\left\{\left|\int f d\mu - \int f d\nu\right| f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ este lipschitziană cu } ||f||_L \leq 1\right\}.$$

Atunci $(\mathrm{P}([0,1]), d_H)$ este un spaţiu metric compact. Pentru $0 < \theta \leq \frac{1}{2}$, să considerăm din nou contracţiile

$$f_0^\theta : [0,1] \to [0,1], f_0^\theta(t) = \theta t \text{ şi}$$
$$f_1^\theta : [0,1] \to [0,1], f_1^\theta(t) = (1-\theta) + \theta t.$$

Să fixăm $0 < p_0 < 1, 0 < p_1 < 1$ astfel încât $p_0 + p_1 = 1$. În acest moment, să definim IFS-ul cu probabilităţi $(f_0^\theta, f_1^\theta; p_0, p_1)$, care are măsura invariantă λ^θ.

Anume, avem operatorul Markov

$$M^\theta : \mathrm{P}\left([0,1]\right) \to \mathrm{P}\left([0,1]\right), \text{ dat prin}$$
$$M^\theta(\lambda) = p_0 f_0^\theta(\lambda) + p_1 f_1^\theta(\lambda)$$

şi λ^θ este punctul fix al lui M^θ, care este o contracţie cu factorul de contracţie $\leq \frac{1}{2}$ (teoria generală).

Vom considera aplicaţia

$$V : \left(\left(0, \frac{1}{2}\right], \delta\right) \to (\mathrm{P}([0,1]), d_H)\,,\ \text{dată prin } V(\theta) = \lambda^\theta$$

şi vom demonstra că V este lipschitziană. Demonstraţia acestui fapt depinde de următorul rezultat.

Lema 2.4.2. *Pentru orice* $\theta_1, \theta_2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ *şi orice* $\mu \in \mathrm{P}([0,1])$, *avem:*

$$d_H\left(M^{\theta_1}(\mu), M^{\theta_2}(\mu)\right) \leq |\theta_1 - \theta_2|.$$

În final vom demonstra

Teorema 2.4.3. *(Dependenţa lipschitziană a măsurii invariante)*

Aplicaţia V *este lipschitziană. Mai precis, pentru orice* $\theta_1, \theta_2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, *avem:*

$$d_H\left(V(\theta_1), V(\theta_2)\right) \leq 2 \cdot |\theta_1 - \theta_2|.$$

Cazul degenerat $\theta = 0$

Pentru $\theta = 0$, putem considera contracţiile (constante) $f_0^0 = f_0, f_1^0 = f_1$, date prin

$$f_0 : [0,1] \to [0,1], f_0(t) = 0$$
$$f_1 : [0,1] \to [0,1], f_1(t) = 1$$

şi IFS-ul este (f_0, f_1).

Dacă $0 < p_0 < 1, 0 < p_1 < 1$ şi $p_0 + p_1 = 1$, putem considera IFS-ul cu probabilităţi $(f_0, f_1; p_0, p_1)$.

În acest caz:

a) Mulţimea invariantă este $A^0 = \{0, 1\}$.

b) Măsura invariantă este

$$\lambda^0 = p_0\delta_0 + p_1\delta_1$$

($\delta_a : \mathcal{B}([0,1]) \to [0,1]$ este măsura Dirac concentrată în $a \in [0,1]$)

Ultima afirmaţie este adevărată deoarece

$$f_0(\mu)(B) = \mu\left(f_0^{-1}(B)\right) = \begin{cases} \mu(T) = 1, & \text{dacă } 0 \in B \\ 0, & \text{dacă } 0 \notin B, \end{cases}$$

pentru orice $B \in \mathcal{B}([0,1])$ şi $\mu \in \mathcal{P}([0,1])$.

Deci $f_0(\mu) = \delta_0$ ş.a.m.d.

Se pot demonstra afirmaţiile:

Afirmaţia 1. Pentru orice $0 < \theta < \frac{1}{2}$ avem $h(A^\theta, \{0,1\}) \leq \theta$.

(deci $\lim\limits_{\theta \to 0} A^\theta = \{0,1\}$). Într-adevăr, avem: $A^\theta \subset [0, \theta] \cup [1-\theta, 1] = C_1(\theta)$. Pentru orice $x \in A^\theta$,

$$dist(x, \{0,1\}) \leq \theta$$

(dacă $x \in [0,\theta], dist(x,\{0,1\}) = |x-0| = x \leq \theta$, q.e.d.)

Deci
$$\sup\left\{dist(x,\{0,1\}) | x \in A^{\theta}\right\} \leq \theta.$$

Din $dist(x, A^{\theta}) = 0, \forall x \in \{0,1\}$ rezultă totul.

Afirmaţia a 2-a. Pentru orice $0 < \theta < \dfrac{1}{2}$, avem
$$d_H(\lambda^{\theta}, \lambda^{0}) \leq 2\theta$$

(deci $\lim\limits_{\theta\to 0} \lambda^{\theta} = \lambda^{0}$). Această afirmaţie are loc deoarece calculele din Lema 2.4.2 şi din Teorema 2.4.1 rămân valide pentru $\theta_1 = \theta$ şi $\theta_2 = 0$.

2.5 Consideraţii generale asupra paragrafului 2.4

Am demonstrat următoarele afirmaţii:

1. Dacă $\theta_1, \theta_2 \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, atunci $h(A_1^{\theta}, A_2^{\theta}) \leq 6|\theta_1 - \theta_2|$. (dependenţa este lipschtziană, deci continuă).
2. În consecinţă,
$$\lim_{\theta\to\frac{1}{2}} A^{\theta} = A^{\frac{1}{2}} = [0,1]$$
$$\lim_{\theta\to 0} A^{\theta} = A^{0} = \{0,1\}.$$
3. Dacă $\theta_1, \theta_2 \in [0, \dfrac{1}{2}]$, atunci
$$d_H(\lambda^{\theta_1}, \lambda^{\theta_2}) \leq 2|\theta_1 - \theta_2|$$
(dependenţa este lipschtziană, deci continuă).
4. În consecinţă,
$$\lim_{\theta\to\frac{1}{2}} \lambda^{\theta} = \lambda^{\frac{1}{2}}$$
$$\underset{\theta\to 0}{lim} \lambda^{\theta} = \lambda^{0} = p_0\delta_0 + p_1\delta_1.$$

1 şi 2 afirmă că proprietăţile topologice (i.e. calitatea de a fi homeomorfă cu o mulţime fixată, calitatea de a fi total disconectată) nu se conservă prin convergenţa în metrica h. Limita în 0 afirmă că nici proprietăţile de cardinalitate nu se conservă. De aici „slăbiciunea” sa.

3 şi 4 afirmă că proprietăţile teoretice legate de măsură (i.e. calitatea de a fi singulară, faptul că suportul său este neglijabil) nu se conservă prin convergenţa în metrica d_H. Deci d_H este „slabă”.

În acelaşi timp, se observă că transformările $\theta \mapsto A^{\theta}, \theta \mapsto \lambda^{\theta}$ sunt continue.

Limitele în $\dfrac{1}{2}$ şi în 0 sunt „singulare”. Deci, acumulări cantitative (chiar continue) pot duce la schimbări calitative dramatice (salturi).

3 Sisteme iterative infinite. Subsisteme iterative

3.1 Introducere. Rezultate pregătitoare

Acest capitol este dedicat sistemelor iterative generale, pe care le vom numi (în virtutea unei cutume actuale) sisteme iterative infinite.

Vom studia subsistemele acestor sisteme. Baza teoretică este expusă în articolul [41], iar rezultatele din acest capitol sunt luate din articolele [15] şi [40].

Dacă I este o mulţime nevidă, numită alfabet, notăm cu

$$\Lambda = \Lambda(I) = I^{\mathbb{N}^*} \quad \text{(alternativ, cu } I^{\infty})$$

mulţimea având ca elemente $\omega = \omega_1\omega_2\ldots\omega_n\ldots$, cu $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots \in I$.

Mai notăm cu $\Lambda_n = I^{\mathbb{N}_n^*} = I^{\{1,2,\ldots,n\}}$ mulţimea cuvintelor de lungime n ($\omega = \omega_1\omega_2\ldots\omega_n \in \Lambda_n$). În vreme ce $\omega \in \Lambda(I)$ se numeşte cuvânt infinit cu literele din alfabetul I, $\omega \in \Lambda_n(I)$ este cuvânt de lungime n, cu litere din alfabetul I; vom scrie $n = l(\omega)$.

Mai notăm cu $\Lambda^* = \Lambda^*(I)$ mulţimea cuvintelor cu litere din alfabetul I de lungime finită

$$\Lambda^*(I) = \bigcup_{m\geq 1} \Lambda_m(I) \cup \{v\},$$

unde $\Lambda_0(I) = \{v\}$ este cuvântul vid, având lungimea zero, $l(v) = 0$.

Dacă $\omega \in \Lambda(I)$ sau $\omega \in \Lambda_n(I)$ şi $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, notăm cu $[\omega]_m = \omega_1\omega_2\ldots\omega_m$.

Pentru $\alpha, \beta \in \Lambda(I)$ definim

$$d_\Lambda(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \delta_{\alpha_k}^{\beta_k}}{3^k},$$

unde

$$\delta_x^y = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad x = y \\ 0, & \text{dacă} \quad x \neq y \end{cases}$$

este simbolul lui Kronecker.

Observăm că $(\Lambda, \mathrm{d}_\Lambda)$ reprezintă un spaţiu metric complet. Dacă I este finită, atunci (Λ, d_Λ) este spaţiu metric compact.

Considerăm

$$F_i : \Lambda(I) \to \Lambda(I), \quad F_i(\omega) = i\omega, \ \forall\, \omega \in \Lambda(I).$$

Se observă că, în condiţiile date, F_i este o contracţie, cu factorul de contracţie $\dfrac{1}{3}$.

$$d_\Lambda\left(F_i(\alpha), F_i(\beta)\right) = \frac{1}{3} d_\Lambda(\alpha, \beta), \ \forall\, \alpha, \beta \in \Lambda(I).$$

Pentru $\omega = \omega_1\omega_2\ldots\omega_m \in \Lambda_m(I)$ notăm cu

$$F_\omega = F_{\omega_1} \circ F_{\omega_2} \circ \ldots \circ F_{\omega_m}$$

şi cu $\Lambda_\omega = F_\omega(\Lambda)$.

Prin convenţie, punem

$$F_v = F_\emptyset = id_X.$$
$$\Lambda_v = \Lambda_\emptyset = F_v(\Lambda) = \Lambda.$$

Observaţii

1) $\Lambda(I) = \bigcup\limits_{i \in I} F_i(\Lambda(I))$, deci $A = \Lambda(I)$ reprezintă atractorul IIFS-ului $\left(\Lambda(I), (F_i)_{i\in I}\right)$ (v. definiţia 3.1.2).

2) $\Lambda = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda_m} \Lambda_\alpha$, pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$.

Definiţia 3.1.1. Fie (X, d_X) şi (Y, d_Y) două spaţii metrice. O familie de funcţii $(f_i)_{i\in I}$, $f_i : X \to Y$, se numeşte <u>mărginită</u> dacă mulţimea $\bigcup\limits_{i\in I} f_i(A)$ este mărginită, pentru orice submulţime mărginită $A \subseteq X$.

Definiţia 3.1.2. <u>Un sistem iterativ infinit de funcţii</u> (un IIFS, pe scurt) constă dintr-o familie mărginită de contracţii $(f_i)_{i\in I}$ pe X cu proprietatea că
$$\sup_{i\in I} Lip\,(f_i) < 1.$$
Se notează $\mathcal{S} = \left(X, (f_i)_{i\in I}\right)$.

Fie (X, d) un spaţiu metric complet.

Definim $\mathcal{BC}(X) = \{B \subset X \mid B \text{ închisă, mărginită, nevidă}\}$. Ştim că $(\mathcal{BC}(X), h)$ reprezintă un spaţiu metric complet, unde h este metrica Hausdorff-Pompeiu.

Considerăm o familie mărginită de funcţii $(f_i)_{i\in I}$ ca mai sus şi,corespunzător, un sistem iterativ infinit $\mathcal{S} = \left(X, (f_i)_{i\in I}\right)$. Definim $\mathcal{F}_s : \mathcal{BC}(X) \to \mathcal{BC}(X)$, prin $\mathcal{F}_s(B) = \overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i(B)}$. Se verifică faptul că definiţia este corectă.

Apoi,
$$h\left(\mathcal{F}_s(B'), \mathcal{F}_s(B'')\right) = h\left(\bigcup_{i\in I} f_i(B'), \bigcup_{i\in I} f_i(B'')\right) \le \sup_{i\in I} h\left(f_i(B'), f_i(B'')\right) \le$$
$$\le \left(\sup_{i\in I} Lip\, f_i\right) \cdot h\left(B', B''\right) \le r \cdot h\left(B', B''\right),\ \forall B', B'' \in \mathcal{BC}(X).$$
Prin urmare, $\mathcal{F}_s$ este o contracţie pe spaţiul metric complet ($\mathcal{BC}(X)$,h) şi aplicând principiul contracţiei, deducem că $\exists!\, A \in \mathcal{BC}(X)$ astfel încât $\mathcal{F}_s(A) = A$ (unicul punct fix al lui $\mathcal{F}_s$). Vom numi pe A <u>atractorul lui S</u>. Notaţie alternativă: $A = A(S)$ (în cazul când I este mulţime finită, regăsim teoria clasică a sistemelor iterative finite).

Aşadar, unui IIFS îi putem asocia funcţia
$$\mathcal{F}_S : \mathcal{BC}(X) \to \mathcal{BC}(X),$$
definită prin
$$\mathcal{F}_s(B) = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(B)},\ B \in \mathcal{BC}(X),$$
iar $\mathcal{F}_S$ este o contracţie, cu
$$Lip\,(\mathcal{F}_S) \le \sup_{i\in I} Lip\,(f_i)\,.$$

Notaţie. Fie (X, d) un spaţiu metric, $\mathcal{S} = \left(X, (f_i)_{i\in I}\right)$ un IIFS pe X şi $A = A(\mathcal{S})$ atractorul său.

Pentru $\omega = \omega_1\omega_2 \ldots \omega_m \in \Lambda_m(I)$, considerăm $f_\omega = f_{\omega_1} \circ f_{\omega_2} \circ \ldots \circ f_{\omega_m}$ şi,pentru o submulţime $H \subseteq X$, notăm cu $H_\omega = f_\omega(H)$.

În particular, $A_\omega = f_\omega(A)$.

Considerăm, de asemenea, $f_v = id_X$ şi $A_v = A$.

Notaţie. Pentru o contracţie $f : X \to X$, notăm cu e_f punctul fix al lui f. Dacă $f = f_\omega$, notăm cu e_{f_ω} (sau cu e_ω) punctul fix al contracţiei $f = f_\omega$.

Vom folosi, următorul rezultat fundamental:

Teorema 3.1.3. *Fie $\mathcal{S} = \left(X, (f_i)_{i\in I}\right)$ un IIFS, unde (X,d) este un spaţiu metric complet, $A \overset{not}{=} A(\mathcal{S})$ atractorul lui $\mathcal{S}$, iar $r \overset{not}{=} \sup\limits_{i\in I} Lip\,(f_i) < 1$.*

Atunci au loc următoarele afirmaţii:

1) Pentru $m \in \mathbb{N}$ avem $A_{[\omega]_{m+1}} \subseteq A_{[\omega]_m}$ pentru orice $\omega \in \Lambda = \Lambda(I)$ şi

$$\lim_{m\to\infty} diam\left(A_{[\omega]_m}\right) = 0.$$

Mai precis,

$$diam\left(\overline{A_{[\omega]_m}}\right) = diam\left(A_{[\omega]_m}\right) \le r^m \cdot diam(A).$$

2) Dacă a_ω este definit prin

$$\{a_\omega\} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}^*} \overline{A_{[\omega]_m}},$$

atunci

$$\lim_{m\to\infty} d\left(e_{[\omega]_m}, a_\omega\right) = 0.$$

3) Pentru orice $a \in A$ şi orice $\omega \in \Lambda$ avem

$$\lim_{m\to\infty} f_{[\omega]_m}(a) = a_\omega.$$

4) Pentru orice $\alpha \in \Lambda^*$ avem

$$A = A(\mathcal{S}) = \overline{\bigcup_{\omega\in\Lambda} \{a_\omega\}}$$

şi

$$\overline{A_\alpha} = \overline{\bigcup_{\omega\in\Lambda} \{a_{\alpha\omega}\}}.$$

Dacă $A = \bigcup\limits_{i\in I} f_i(A)$, atunci

$$A = A(\mathcal{S}) = \bigcup_{\omega\in\Lambda} \{a_\omega\}.$$

5) Avem

$$\overline{\left\{e_{[\omega]_m} \mid \omega \in \Lambda \ \text{ şi } \ m \in \mathbb{N}^*\right\}} = A.$$

6) Funcţia $\pi : \Lambda \to A$, definită prin $\pi(\omega) = a_\omega$, pentru orice $\omega \in \Lambda$,are următoarele proprietăţi:

(i) π este continuă;

(ii) $\overline{\pi(\Lambda)} = A$;

(iii) dacă $A = \bigcup\limits_{i\in I} f_i(A)$, atunci π este surjectivă;

7) $\pi\left(F_i(\alpha)\right) = f_i\left(\pi(\alpha)\right),\ \forall\, i \in I,\ \forall\, \alpha \in \Lambda$.

Bazându-ne pe aceste rezultate, preluate din lucrarea [41], unde spaţiul codurilor unui sistem iterativ infinit de funcţii (pe scurt un IIFS) este definit şi este descrisă şi relaţia dintre acest spaţiu de coduri şi atractorul IIFS, vom da o condiţie suficientă ca o familie $(I_j)_{j\in L}$ de submulţimi nevide ale lui I, unde $\mathcal{S} = (X,(f_i)_{i\in I})$ este un IIFS, să verifice egalitatea $\overline{\bigcup_{j\in L} A_{I_j}} = A$, unde A este atractorul lui $\mathcal{S}$, iar A_{I_j} este atractorul subsistemului iterativ $\mathcal{S}_{I_j} = \left(X,(f_i)_{i\in I_j}\right)$ al lui $\mathcal{S}$.

În plus, vom demonstra că fiind dat un număr cadinal infinit $\mathcal{A}$, dacă atractorul IIFS-ului $\mathcal{S} = \left(X,(f_i)_{i\in I}\right)$ este de tip $\mathcal{A}$ (aceasta însemnând că există o submulţime densă în A având cardinalul mai mic sau egal decât $\mathcal{A}$), unde (X,d) este un spaţiu metric complet, atunci există $\mathcal{S}_J = \left(X,(f_i)_{i\in J}\right)$ un subsistem iterativ al lui $\mathcal{S}$, având proprietatea că avem $\mathrm{card}(J) \leq \mathcal{A}$, astfel încât atractorii lui $\mathcal{S}$ şi $\mathcal{S}_J$ coincid.

Definiţia 3.1.4. Un spaţiu metric (X,d) este de tip $\mathcal{A}$, unde $\mathcal{A}$ este un număr cardinal, dacă există o submulţime densă $A \subset X$, având proprietatea: $\mathrm{card}A \leq \mathcal{A}$.

Definiţia 3.1.5. Fiind dat un IIFS $\mathcal{S} = \left(X,(f_i)_{i\in I}\right)$ şi o submulţime $J \subset I$, IIFS-ul $\mathcal{S}_J = \left(X,(f_i)_{i\in J}\right)$ se numeşte un <u>subsistem iterativ al lui $\mathcal{S}$</u> (un sub-IFS al lui $\mathcal{S}$, prescurtat).

Teorema 3.1.6. *Fie X un spaţiu metric complet, $f : X \to X$ o contracţie şi e_f punctul fix al lui f. Atunci, pentru orice mulţime închisă nevidă $H \subset X$ cu proprietatea că $f(H) \subset H$, avem $e_f \in H$.*

În consecinţă, dacă $S = \left(X,(f_i)_{i\in I}\right)$ este un IIFS pe X şi $T \in \mathcal{BC}(X)$ are proprietatea că $\mathcal{F}_S(T) \subset T$, rezultă că $A(S) \subset T$.

Vom utiliza în continuare următoarea propoziţie:

Propoziţia 3.1.7. *Fie $\mathcal{S} = \left(X,(f_i)_{i\in I}\right)$ un IIFS, unde (X,d) este un spaţiu metric complet, fie $\alpha : \Lambda^* \to \Lambda$ o funcţie arbitrară şi să considerăm*

$$M = \{\omega\alpha(\omega) \mid \omega \in \Lambda^*\}.$$

Atunci $\pi(M)$ este densă în $A(\mathcal{S})$.

3.2 Rezultate

Teorema 3.2.1. *Fie $S = \left(X,(f_i)_{i\in I}\right)$ un IIFS, unde (X,d) este un spaţiu metric complet şi fie $A := A(S)$ atractorul lui S. Dacă $\aleph_0 \leq \mathrm{card}(I) \leq \mathcal{A}$, unde $\mathcal{A}$ este un număr cardinal, atunci spaţiul metric $(A, d|_A)$ este de tip $\mathcal{A}$,unde $d|_A$ reprezintă restricţia distanţei d la mulţimea $A \times A$.*

Remarcă. Rezultatul teoremei 3.2.1 nu este valabil în cazul în care I este finită (în acest caz atractorul A poate fi de tip strict numărabil, în cazul în care nu este finit).

Teorema 3.2.2. *Fie (X,d) un spaţiu metric complet, $\mathcal{A}$ un număr cardinal infinit şi A o mulţime închisă şi mărginită a lui X de tip $\mathcal{A}$ (i.e. spaţiul metric $(A, d|_A)$ este de tip $\mathcal{A}$). Atunci există un IIFS $S = \left(X,(f_i)_{i\in I}\right)$, având proprietatea că avem*

$$\mathrm{card}(I) \leq \mathcal{A},$$

astfel încât

$$A = A(S).$$

Teorema 3.2.3. *Fie $\mathcal{S} = \big(X, (f_i)_{i\in I}\big)$ un IIFS, unde (X, d) este un spaţiu metric complet, $A := A(\mathcal{S})$ atractorul său şi fie $(I_j)_{j\in L}$ o familie de submulţimi nevide ale lui I astfel încât*

$$\bigcup_{j\in L} I_j = I.$$

Dacă pentru orice $i_1 \in I_{j_1}$, $i_2 \in I_{j_2}, \ldots, i_n \in I_{j_n}$, unde $\{j_1, j_2, \ldots, j_n\} \subseteq L$, există $l \in L$ astfel încât $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I_l$, atunci

$$\overline{\bigcup_{j\in L} A_{I_j}} = A,$$

unde A_{I_j} este atractorul subsistemului iterativ $\mathcal{S}_{I_j} = \Big(X, (f_i)_{i\in I_j}\Big)$ al lui $\mathcal{S}$.

Corolar 3.2.4. *Fie $\mathcal{S} = \big(X, (f_i)_{i\in I}\big)$ un IIFS, unde (X, d) este un spaţiu ar metric complet şi $A := A(\mathcal{S})$ atractorul său.*

Atunci

$$\overline{\bigcup_{\substack{\emptyset\neq J\subseteq I\\ J \text{ finită}}} A_J} = A,$$

unde A_J este atractorul subsistemului iterativ de funcţii $\mathcal{S}_J = \big(X, (f_i)_{i\in J}\big)$ al lui $\mathcal{S}$.

Teorema 3.2.5. *Considerând un număr cardinal infinit $\mathcal{A}$, fie $\mathcal{S} = (X, (f_i)_{i\in I})$ un IIFS astfel încât atractorul $A(\mathcal{S})$ este de tip $\mathcal{A}$, unde (X, d) este un spaţiu metric complet.*

Atunci există $\mathcal{S}_J = \big(X, (f_i)_{i\in J}\big)$ un subsistem iterativ al lui $\mathcal{S}$ astfel încât

$$\operatorname{card}(J) \le \mathcal{A}$$

şi

$$A(\mathcal{S}) = A(\mathcal{S}_J).$$

Vom indica o modalitate de obţinere a unei submulţimi $J \subset I$ pentru care avem egalitatea

$$A(\mathcal{S}) = A\left(\mathcal{S}_J\right).$$

Vom considera că şi pe mulţimea de indici I este dată o metrică d_I. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ vom înzestra $\Lambda_n(I) = I^n$ cu metrica „produs“

$$\delta_n\left(\omega, \omega'\right) := \sum_{k=1}^{n} d_I\left(\omega_k, \omega'_k\right),$$

unde $\omega = \omega_1 \ldots \omega_n \in \Lambda_n(I)$, $\omega' = \omega'_1 \ldots \omega'_n \in \Lambda_n(I)$.

Notăm cu

$$r := \sup_{i\in I} Lip\left(f_i\right) < 1.$$

Teorema 3.2.6. *Fie (X, d) un spaţiu metric complet pe care este dat IFS-ul $\mathcal{S} = \big(X, (f_i)_{i\in I}\big)$ cu atractorul $A(\mathcal{S})$.*

Presupunem că funcţia „generatoare“ $f : X \times I \to X$ dată prin

$$f(x, i) := f_i(x),\ x \in X,\ i \in I,$$

are proprietatea că $\exists\, C > 0$ astfel încât

$$d_X\left(f(x, i), f(x, i')\right) \le C \cdot d_I(i, i'),\ \forall\, x \in X,\ \forall\, i, i' \in I.$$

Atunci pentru orice submulţime $J \subset I$ pentru care $\overline{J} = I$ are loc egalitatea de mulţimi

$$A(\mathcal{S}) = A\left(\mathcal{S}_J\right).$$

4 Spaţii speciale de funcţii şi de măsuri. Măsuri invariante

4.1 Integrala seschiliniară uniformă

Rezultatele din acest paragraf au apărut în articolul [16]. Le prezentăm, pentru completitudine, fără demonstraţii.

Definiţia 4.1.1. Fie T o mulţime nevidă şi $\Sigma \subset \mathcal{P}(T)$ o $\sigma-$algebră pe T. O aplicaţie $\mu : \Sigma \to X$ se numeşte măsură vectorială σ-aditivă sau, mai concis, măsură vectorială, dacă pentru orice şir $(A_n)_n \subset \Sigma$ de mulţimi mutual disjuncte, are loc egalitatea

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Vom nota cu

$$ca(\Sigma, X) := \{\mu : \Sigma \to X \mid \mu \text{ măsură vectorială}\}.$$

Un rol fundamental în expunerea noastră îl joacă însă un subspaţiu al lui $ca(\Sigma, X)$. Pentru a-l putea defini avem nevoie de un concept „nou“ şi anume acela de variaţie a unei măsuri vectoriale.

Definiţia 4.1.2. Pentru o măsură vectorială $\mu : \Sigma \to X$ variaţia lui μ este măsura pozitivă

$$|\mu| : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}_+}$$

definită după cum urmează:

dacă $A \in \Sigma$ se va defini

$$|\mu|(A) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{p} \|\mu(A_i)\|\right\},$$

supremumul fiind calculat în raport cu toate partiţiile $\pi = (A_1, A_2, \ldots, A_p)$ ale lui A (i.e. $A_1, A_2, \ldots, A_p$ sunt în Σ, $\bigcup_{i=1}^{p} A_i = A$ şi $A_i \cap A_j = \emptyset$ pentru $i \neq j$).

Spaţiul de măsuri

$$cabv(\Sigma, X) := \{\mu \in ca(\Sigma, X) \mid \mu \text{ măsură cu variaţie mărginită}\}$$

va juca un rol fundamental. Vom înzestra spaţiul vectorial $cabv(\Sigma, X)$ cu norma naturală

$$\|\mu\| = |\mu|(T), \text{ dacă } \mu \in cabv(\Sigma, X).$$

Se demonstrează că $(cabv(\Sigma, X), \|\cdot\|_{var})$ este un spaţiu Banach (conform „Spaţii de funcţii“, autor Ion Chiţescu, pag. 157, Teorema 16, [10]).

Vom mai nota $cabv(\Sigma, X) = cabv(T, X)$.

Pentru a putea stabili o legătură, cel puţin în cazul în care T este un spaţiu metric compact, iar X un spaţiu Hilbert, între spaţiul de funcţii $\mathcal{C}(T, X)$ şi spaţiul de măsuri $cabv(T, X)$, vom avea nevoie de un concept nou şi anume acela de integrală a unei funcţii continue $f : T \to X$ în raport cu o măsură $\mu \in cabv(T, X)$.

Să considerăm, pentru început, o mulţime nevidă T, o $\sigma-$ algebra $\Sigma \subset \mathcal{P}(T) =$ familia tuturor submulţimilor lui T şi un spaţiu Banach X , $|\cdot|)$. Pentru a evita situaţiile triviale vom admite, de aici încolo, că $X \neq \{0_X\}$.

În cazul în care T este un spaţiu topologic, în particular dacă (T, d) va fi un spaţiu metric compact, vom considera că $\sigma-$ algebra Σ este formată din submulţimile boreliene ale lui T şi vom utiliza, pentru a reprezenta acest lucru în scris, notaţia $\Sigma = \mathcal{B}_T$.

Spaţiul vectorial

$$\boldsymbol{B}(T, X) := \{f : T \to X \mid f \text{ este marginită}\},$$

înzestrat cu norma naturală,

$$\|f\|_\infty := \sup\{\|f(t)\| \, |t \in T\},$$

devine un spaţiu Banach

În continuare vor fi puse în evidenţă diferite subspaţii vectoriale ale spaţiului $\boldsymbol{B}(T, X)$.

Reamintim că o *partiţie* a lui $A \in \Sigma$ este un $p-tuplu$ $(A_1, A_2, ..., A_p)$, unde $\emptyset \neq A_i \in \Sigma$ sunt mutual disjuncte ($A_i \cap A_j = \emptyset$, pentru $i \neq j$) şi $\bigcup\limits_{i=1}^{p} A_i = A$. Când nu apare pericolul unor confuzii vom nota, mai simplu, $(A_i)_i$ pentru a desemna o partiţie.

Pentru orice asemenea partiţie se poate considera o *funcţie simplă*

$$f = \sum_{i=1}^{p} \varphi_{A_i} x_i \ ,$$

unde $x_i \in X$; reprezentarea nu este unică! Să reţinem că

$$x_i = f(t)$$

pentru orice $i \in \{1, 2, ..., p\}$ şi orice $t \in A_i$, dacă $A_i \neq \emptyset$.

Spaţiul vectorial al tuturor funcţiilor simple va fi notat prin

$$\boldsymbol{S}(\Sigma, X) := \{f : T \to X \mid f \text{ este simplă}\}.$$

Este clar că

$$\boldsymbol{S}(\Sigma, X) \subset \boldsymbol{B}(T, X).$$

Închiderea $\boldsymbol{TM}(\Sigma, X)(:= \overline{\boldsymbol{S}(\Sigma, X)}\ )$ a lui $\boldsymbol{S}(\Sigma, X)$ în $\boldsymbol{B}(T, X)$ este spaţiul *funcţiilor total măsurabile*:

$$\boldsymbol{TM}(\Sigma, X) := \{f : T \to X \left| \begin{array}{c} \text{există un şir } (f_n)_n \subset \boldsymbol{S}(\Sigma, X) \\ \text{astfel încât } \ f_n \underset{n}{\overset{u}{\to}} f \end{array} \right. \}.$$

Dacă T este un spaţiu metric compact, un alt subspaţiu închis important al lui $\boldsymbol{B}(T, X)$ este

$$\mathcal{C}(T, X) := \{f : T \to X \mid f \text{ este continuă}\}.$$

Se ştie că acesta este un spaţiu Banach, dacă este înzestrat cu norma naturală $\|f\|_\infty$, pentru f din $\mathcal{C}(T, X)$.

În acest caz, în loc de $\boldsymbol{S}(\mathcal{B}_T, X)$ ($\boldsymbol{TM}(\mathcal{B}_T, X)$) vom scrie $\boldsymbol{S}(T, X)$ ($\boldsymbol{TM}(T, X)$).

În fapt avem

$$\mathcal{C}(T, X) \subset \boldsymbol{TM}(T, X).$$

În acest moment suntem în măsură să definim *integrala unei funcţii total măsurabile* (în particular a unei funcţii continue) *în raport cu o măsură cu variaţie mărginită.*

Fie X un spaţiu Hilbert înzestrat cu produsul scalar $(\cdot\,|\cdot)$. Pentru orice $f \in \boldsymbol{S}(\Sigma, X)$, de forma

$$f = \sum_{i=1}^{m} \varphi_{A_i} x_i,$$

şi orice $\mu \in cabv(\Sigma, X)$, vom considera **integrala lui f în raport cu μ**, care, prin definiţie, va fi numărul (din K)

$$\int f d\mu := \sum_{i=1}^{m} (x_i \,|\mu(A_i)) \tag{4.1}$$

(să reţinem că acest număr nu depinde de reprezentarea lui f).

În cazul $X = \mathbb{C}$ este clar că

$$\int f d\mu := \sum_{i=1}^{m} x_i \overline{\mu(A_i)}\ . \tag{4.2}$$

Datorită inegalităţii evidente

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \|\mu\|_{var} \cdot \|f\|_{\infty}\ , \tag{4.3}$$

operaţia liniară

$$f \longmapsto \int f d\mu$$

este uniform continuă şi poate fi prelungită (utilizând extensia prin continuitate uniformă) la tot $\overline{\boldsymbol{S}(\Sigma, X)} = \boldsymbol{TM}(\Sigma, X)$. Mai precis, pentru orice $f \in \boldsymbol{TM}(\Sigma, X)$, valoarea extensiei este **integrala lui f în raport cu μ** :

$$\int f d\mu := \lim_{m} \int f_m d\mu,$$

oricare ar fi şirul $(f_m)_m \subset \boldsymbol{S}(\Sigma, X)$ astfel încât $f_m \overset{u}{\underset{m}{\to}} f$. Mai mult, inegalitatea (4.3) se va menţine şi în acest caz.

Vom reţine faptul că, în cazul $X = K$ şi $\mu \geq 0$, integrala $\displaystyle\int f d\mu$, calculată aici, coincide cu integrala clasică (standard).

Un rezultat deosebit de important în aplicaţii îl constituie următoarea

Teorema 4.1.3. *(Teorema de transport). Fie $\omega : T \to T$ o funcţie $(\Sigma, \Sigma)-$măsurabilă, $f \in \boldsymbol{TM}(\Sigma, X)$ şi $\mu \in cabv(\Sigma, X)$. Atunci*

$$\int f \circ \omega d\mu = \int f d(\omega(\mu)).$$

Corolar 4.1.4. *Fie (T, d) un spaţiu metric compact şi X un spaţiu Hilbert peste K.*

Dacă $\omega : T \to T$ este o aplicaţie continuă atunci

$$\int f \circ \omega d\mu = \int f d(\omega(\mu)),$$

pentru orice funcţie $f \in \mathcal{C}(T, X)$ şi orice măsura $\mu \in cabv(T, X)$. Am notat prin $\omega(\mu)$ transportata lui μ prin ω, definită astfel:

$$\omega(\mu) : \Sigma \to X,\ \omega(\mu)(A) = \mu\left(\omega^{-1}(A)\right),\ \forall\, A \in \Sigma.$$

Un alt rezultat util, care rezultă şi din considerente generale de analiză funcţională, este dat de următoarea

Lema 4.1.5. *Dacă* $f, g \in \mathcal{C}(T, X)$ *şi*

$$\int f d\nu = \int g d\nu,$$

pentru orice $\nu \in cabv(T, X)$, *atunci* $f = g$.

Pentru $f \in \mathcal{C}(T, X)$, vom utiliza, în mod frecvent, formula

$$\int f d\mu = \lim_m \int f_m d\mu,$$

unde $(f_m)_m$ este un şir canonic asociat lui f.

Oricare ar fi $f \in \mathcal{C}(T, X)$ şi pentru orice $a \in T$ şi $x \in X$, avem

$$\int f d(\delta_a x) = (f(a)\,|x)\ . \tag{$*$}$$

În particular, dacă $X = K$, avem, pentru orice $f \in \mathcal{C}(T, K)$ si orice $a \in T$, $\int f d\delta_a = f(a)$.

De fapt, formula $(*)$ este validă în general, pentru spaţii abstracte T şi orice $f \in \boldsymbol{TM}(\Sigma, X)$.

Relaţia (4.3) poate fi îmbunătăţită, şi anume

$$\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f|\, d\,|\mu| \leq \|\mu\|_{var} \cdot \|f\|_\infty \tag{4.4}$$

întrucât $|f| \in \boldsymbol{TM}(\Sigma, \mathbb{R})$.

Aplicaţia

$$H : \boldsymbol{TM}(\Sigma, X) \times cabv(\Sigma, X) \to K,$$

dată prin

$$H(f, \mu) := \int f d\mu$$

este seschiliniară:

$$\begin{array}{rcl} \int (\alpha f + \beta g) d\mu & = & \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu \\ \int f d(\alpha\mu + \beta\nu) & = & \overline{\alpha} \int f d\mu + \overline{\beta} \int f d\nu \end{array} \tag{4.5}$$

oricare ar fi f, g în $\boldsymbol{TM}(\Sigma, X)$, orice μ, ν în $cabv(\Sigma, X)$ şi orice α, β în K.

Aplicaţia H este şi continuă întrucât, utilizând (4), vom avea

$$|H(f, \mu)| \leq \|\mu\|_{var} \cdot \|f\|_\infty\ .$$

Aşadar

$$(f_m \underset{m}{\overset{u}{\to}} f \ \text{ in } TM(\Sigma, X) \Longrightarrow \int f_m d\mu \underset{m}{\to} \int f d\mu)$$

şi

$$(\mu_m \underset{m}{\to} \mu \ \text{ in } cabv(\Sigma, X) \Longrightarrow \int f d\mu_m \underset{m}{\to} \int f d\mu).$$

Ţinând seama de (4.1), (4.2), (4.5), rezultă că, în cazul $X = K$, avem, pentru orice $f \in \boldsymbol{TM}(\Sigma, K)$ şi orice $\mu \in cabv(\Sigma, K)$:

$$\underbrace{\int f d\mu}_{\text{definiţia actuală}} = \underbrace{\int f d\overline{\mu}}_{\text{definiţia standard}}$$

unde $\overline{\mu} : \Sigma \to K$ este măsura data prin

$$\overline{\mu}(A) := \overline{\mu(A)},$$

oricare ar fi $A \in \Sigma$.

Teorema de dualitate Riesz - Kakutani afirmă că dualul $\mathcal{C}(T,K)'$ al lui $\mathcal{C}(T,K)$ este liniar şi izometric izomorf cu $cabv(T,K)$, prin izomorfsmul

$$cabv(T,K) \ni \mu \leftrightarrow x'_\mu \in \mathcal{C}(T,K)'$$

unde

$$x'_\mu(f) := \int f d\mu \tag{4.6}$$

iar integrala din (4.6) este calculată în maniera standard. În plus, funcţionalele pozitive (i.e. $x'_\mu(f) \geq 0,$ dacă $\ f \geq 0$) sunt date de măsurile pozitive $\mu \geq 0$.

În termenii prezentei integrale se poate reprezenta (4.6) prin

$$x'_\mu(f) = \int f d\overline{\mu}, \tag{4.6$'$}$$

aplicaţia $\mu \longmapsto \displaystyle\int f d\overline{\mu}$ fiind un izomorfism liniar şi izometric (vezi (4.5)).

Dacă utilizăm şi izomorfismul antiliniar şi izometric Riesz - Fréchet care permite identificarea $X = X'$, precum şi extensia teoremei Riesz - Kakutani ([21]), vom putea extinde consideraţiile anterioare şi vom obţine un izomorfism antiliniar şi izometric

$$cabv(T,X) \ni \mu \leftrightarrow x'_\mu \in \mathcal{C}(T,X)',$$

unde $x'_\mu : \mathcal{C}(T,X) \to K$ acţionează astfel

$$x'_\mu(f) = \int f d\mu$$

(integrala fiind considerată în sensul actual).

Fie $f \in \boldsymbol{TM}(T,K)$, $\mu \in cabv(T,K)$ şi x, y în X. Atunci $fx \in \boldsymbol{TM}(T,X)$, $\mu y \in cabv(T,X)$ şi are loc egalitatea

$$\int (fx) d(\mu y) = (\int f d\mu) \cdot (x\,|y) \ . \tag{4.7}$$

În particular,

$$\int (fx) d(\mu x) = \left(\int f d\mu\right) \cdot \|x\|^2 . \tag{4.7$'$}$$

Relaţia (4.7) se demonstrează uşor, mai întâi, pentru funcţii simple f.

Utilizând (4.7′), în cazul $X = K^n$, se poate reduce calculul integralelor vectoriale la calculul unor integrale scalare. Mai precis, pentru $f = (f_1, f_2, ..., f_n) \in \boldsymbol{TM}(T, K^n)$ şi $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \in cabv(T, K^n)$, unde $f_i \in \boldsymbol{TM}(T,K)$, $\mu_i \in cabv(T,K)$, vom obţine

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int f_i d\mu_i \tag{4.8}$$

(avem $f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i,\ \mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$, unde $e_i = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, 1 pe locul al $i - lea$ şi, cu (4.5) şi (4.7):

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int f_i e_i d\mu = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \int f_i e_i d(\mu_j e_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \int f_i d(\mu_j) \cdot (e_i \,|e_j) = \sum_{i=1}^{n} \int f_i d\mu_i).$$

Vom ilustra formula (4.8), aplicând formula (4.6′), prezentând următorul

Exemplu.

Fie $T = [0, 1]$, $X = \mathbb{C}^2$ şi $\lambda : \mathcal{B}_T \to \mathbb{R}_+$ măsura Lebesgue pe mulţimile boreliene $\mathcal{B}_T$ ale lui $[0, 1]$. Măsura $\mu : \mathcal{B}_T \to \mathbb{C}^2$ este dată prin $\mu = (\mu_1, \mu_2)$,unde

$$\mu_1 = \lambda + i\delta_1,\ \mu_2 = \delta_0 + i\lambda.$$

Funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{C}^2$ este dată prin $f = (f_1, f_2)$, unde

$$f(t) = (t, 1 + it) \Longrightarrow f_1(t) = t,\ f_2(t) = 1 + it.$$

Atunci

$$\int f d\mu = \int f_1 d\mu_1 + \int f_2 d\mu_2.$$

Dar

$$\int f_1 d\mu_1 = \int_{[0,1]} td(\overline{\lambda + i\delta_1}) = \int_{[0,1]} td(\lambda - i\delta_1) = \int_0^1 tdt - it_{|t=1} = \frac{1}{2} - i$$

şi

$$\int f_2 d\mu_2 = \int_{[0,1]} (1 + it)d(\overline{\delta_0 + i\lambda}) = \int_{[0,1]} (1 + it)d(\delta_0 - i\lambda) =$$

$$= (1 + it)_{|t=0} - i \int_0^1 (1 + it)dt = 1 - i(1 + \frac{i}{2}) = \frac{3}{2} - i.$$

În fine

$$f d\mu = 2 - 2i.$$

Pentru a extinde (4.8) la cazul spaţiilor Hilbert infinit dimensionale, vom avea nevoie de câteva fapte preliminare.

Pentru început vom considera un *subspaţiu închis* $Y \subset X$. Vom nota cu $\pi_Y : X \to X$ proiecţia ortogonală corespunzătoare. Pentru orice $f \in \mathcal{C}(T, X)$ şi $\mu \in cabv(T, X)$, avem

$$\begin{array}{lcl} \pi_Y \circ f \in \mathcal{C}(T, X) & , & \|\pi_Y \circ f\|_\infty \le \|f\|_\infty \\ \pi_Y \circ \mu \in cabv(T, X) & , & \|\pi_Y \circ \mu\| \le \|\mu\| \end{array} ,$$

întrucât $\|\pi_Y(x)\| \le \|x\|$, oricare ar fi $x \in X$. Atunci, în una din ipotezele $f(T) \subset Y$ sau $\mu(\mathcal{B}_T) \subset Y$, vom avea

$$\int f d\mu = \int (\pi_Y \circ f)d(\pi_Y \circ \mu)\ . \tag{4.9}$$

În consecinţă, dacă $Y \subset X$ este un subspaţiu închis al cărui complement ortogonal este $Z \subset X$, iar $f \in \mathcal{C}(T, X)$, $\mu \in cabv(T, X)$ sunt astfel încât $f(T) \subset Y$ şi $\mu(\mathcal{B}_T) \subset Z$, vom avea

$$\int f d\mu = 0. \tag{4.10}$$

Extindem formula (4.8).

În cazul particular, când $X = K$, considerând o bază ortonormală $(e_i)_{i\in I}$ a lui X, putem identifica orice $f \in \mathcal{C}(T.X)$ prin $f \equiv (f_i)_{i\in I} \subset \mathcal{C}(K)$ şi orice $\mu \in cabv(T,X)$ prin $\mu \equiv (\mu)_{i\in I} \subset cabv(K)$, cu explicaţiile următoare:

a) Pentru orice $f \in \mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(T,X)$ şi orice $t \in T$, $f(t) = \underset{i}{S} f_i(t)e_i$;

b) Pentru orice $\mu \in cabv(X)$ şi orice $A \in \mathcal{B}_T$, $\mu(A) = \underset{i}{S}\mu_i(A)e_i$ (familii sumabile).

Se poate demonstra atunci că $\displaystyle\int f\mathrm{d}\mu = \underset{i}{S}\int f_i\mathrm{d}\mu_i$ (integrala fiind calculată în definiţia actuală).

4.2 Norme şi topologii pe anumite spaţii de măsuri

Rezultatele din acest paragraf au apărut în articolul [17]. Le prezentăm, pentru completitudine, fără demonstraţii.

4.2.1 Funcţii lipschitziene

A. De acum înainte, prin T, vom desemna un spaţiu metric compact. Am văzut că pe $cabv(T,X)$ se poate considera norma

$$\|\mu\|_{var} = |\mu|(T)$$

şi, echipat cu această normă, care generează topologia $\tau(var,T,X)$, spaţiul $cabv(T,X)$ devine un spaţiu Banach.

În continuare vom inzestra spaţiul de măsuri $cabv(T,X)$ cu o nouă normă. În acest scop vom reaminti câteva fapte cunoscute şi vom introduce o serie de notaţii.

Dacă (E,d_E) şi (F,d_F) sunt două spaţii metrice, o funcţie $f: E \to F$ se numeşte **funcţie Lipschitz** (vom spune că f este o L funcţie) dacă exista un număr $M > 0$ astfel încât

$$d_F(f(x),f(y)) \leq M\ d_E(x,y),$$

pentru orice $x,y \in E$. Cel mai mic astfel de număr M se numeşte constanta Lipschitz a lui f şi este desemnată prin $\|f\|_L$, ceea ce înseamnă că

$$\|f\|_L := \sup_{x\neq y}\frac{d_F(f(x),f(y))}{d_E(x,y)}$$

(supremumul este calculat în raport cu toţi $x,y \in E$, $x \neq y$).

În cazul $E = F$, $d_E = d_F$ şi $\|f\|_L < 1$, vom spune ca f este o contracţie, iar $\|f\|_L$ poartă numele de factorul de contracţie al lui f. Reamintim şi faptul că în cazul în care (E,d_E) este un spaţiu metric complet (e.g. E este o submulţime închisă $E \subset Y$, unde (Y,d_Y) este un spaţiu metric complet şi $d_E(x,y) = d_Y(x,y)$, pentru orice $x,y \in E$) şi $f: E \to E$ este o contracţie, atunci există un punct fix unic x^* pentru f (i.e. $x^* \in E$ şi $f(x^*) = x^*$) care poate fi obţinut după cum urmează:

$$x^* = \lim_n f^n(x_0),$$

unde $x_0 \in E$ poate fi ales în mod arbitrar, iar $f^n = \underbrace{f\circ f\circ ...\circ f}_{\text{n times}}$ (Principiul contracţiei al lui Banach - Caccioppoli - Picard).

Avem

$$L(T,X) = BL(T,X) \subset \mathcal{C}(T,X)$$

unde

$$L(T,X) = \{f : T \to X \,|\, f \text{ este o } L \text{ funcţie}\},$$

$$BL(T,X) = \{f : T \to X \,|\, f \text{ este o } L \text{ funcţie mărginită}\},$$

iar spaţiul vectorial $BL(T,X)$ este seminormat dacă este înzestrat cu seminorma $\|\cdot\|_L$ ($\|f\|_L = 0 \iff f$ este constantă).

Pe $BL(T,X)$ se poate considera norma

$$\|f\|_{BL} \overset{def.}{=} \|f\|_\infty + \|f\|_L,$$

iar bila unitate închisă în raport cu această normă va fi desemnată prin

$$BL_1(T,X) := \{f \in BL(T,X) \,|\, \|f\|_{BL} \le 1\}.$$

Fie E, F două spaţii normate. Atunci

$$\mathcal{L}(E,F) = \{V : E \to F \,|\, V \text{ este liniar şi Lipschitz}\},$$

iar pentru orice $V \in \mathcal{L}(E,F)$ vom avea

$$\|V\|_0 = \|V\|_L.$$

4.2.2 Scheme de contracţie

Să considerăm un spaţiu vectorial (peste K) E. Fie $E_1 \subset E$ un subspaţiu vectorial al sau care să fie şi normat, i.e. avem un spaţiu normat $(E_1, \|\cdot\|)$.

Vom considera şi o mulţime nevidă $A \subset E$ astfel încât

$$A - A = \{x - y \mid x \in A, y \in A\} \subset E_1.$$

În acest fel se obţine un spaţiu metric (A, δ), unde $\delta(x,y) = \|x - y\|$, pentru orice x, y în A.

Să considerăm şi un operator liniar $H\colon E \to E$ astfel încât $H(E_1) \subset E_1$. Vom nota cu H_1 operatorul $H_1\colon E_1 \to E_1$, definit prin $H_1(x) = H(x)$. Vom presupune şi că $H_1 \in \mathcal{L}(E_1)$, i.e. H_1 este continuu. În fine, fie $y \in E$ şi să definim $P\colon A \to E$, via $P(x) = H(x) + y$. Vom presupune ca $P(A) \subset A$ şi vom scrie π pentru a desemna aplicaţia $\pi\colon A \to A$ care este dată prin $\pi(x) = P(x)$.

Atunci π este o aplicaţie lipschitziana, cu constanta Lipschitz constant $\|\pi\|_L \le \|H_1\|_0$. Într-adevăr, pentru orice x', x'' în A, avem $\pi(x')$, $\pi(x'') \in A$ şi

$$\begin{aligned}
\delta(\pi(x'), \pi(x'')) &= \|\pi(x') - \pi(x'')\| = \|P(x') - P(x'')\| = \\
&= \|H(x') - H(x'')\| = \|H(x' - x'')\| = \|H_1(x' - x'')\| \le \\
&\le \|H_1\|_0 \|x' - x''\| = \|H_1\|_0 \ \delta(x', x'').
\end{aligned}$$

Vom remarca şi faptul că, în cazul $\|H_1\|_0 < 1$, aplicaţia π este o contracţie, cu factorul de contracţie $\le \|H_1\|_0$. Cazul $E_1 = E$ este mult mai simplu.

Această

g*Schemă de Contracţie*“ va fi utilizată, ulterior, în mai multe rânduri.

4.2.3 Norme şi topologii pe anumite spaţii de măsuri

Teorema 4.2.1. *Oricare ar fi $\mu \in cabv(T,X)$, avem*

$$\|\mu\|_{MK} \le \|\mu\|_{var},$$

unde

$$\|\mu\|_{MK} \overset{def.}{=} \sup\{\, \textstyle\int f d\mu \,|\, f \in BL_1(T,X) \,\}.$$

În plus, aplicaţia

$$N\colon cabv(T,X) \to \mathbb{R}_+,$$

dată prin

$$N(\mu) := \|\mu\|_{MK},$$

este o normă pe $cabv(T, X)$.

Definiţia 4.2.2. Norma $\|\cdot\|_{MK}$ poarta numele de *norma Monge-Kantorovici.*

Topologia generată de norma $\|\cdot\|_{MK}$ pe $cabv(T, X)$ va fi notată prin $\mathcal{T}(MK, X)$ (*topologia Monge-Kantorovici*). Restricţia acesteia la

$$\mathfrak{B}_a(X) := \{\mu \in cabv(T, X) \,|\, \|\mu\|_{var} \leq a\}$$

va fi notată cu $\mathcal{T}(MK, X, a)$.

Conform cu definiţia, pentru orice $\mu \in cabv(T, X)$ şi orice $f \in BL(T, X)$ avem

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \|\mu\|_{MK} \|f\|_{BL} \tag{4.11}$$

Pentru un şir $(\mu_n)_n \subset cabv(T, X)$ şi $\mu \in cabv(T, X)$, vom utiliza notaţia

$$\mu_n \underset{n}{\overset{MK}{\rightarrow}} \mu,$$

pentru a desemna faptul că μ_n converge la μ în topologia Monge-Kantorovici $\mathcal{T}(MK, X)$.

Remarcă. Inegalitatea (adevărată pentru orice $\mu \in cabv(T, X)$)

$$\|\mu\|_{MK} \leq \|\mu\|_{var}$$

arată că $\mathcal{T}(MK, X) \subset \mathcal{T}(var, X)$ (topologia variaţională este mai fină decat topologia Monge-Kantorovici).

În general vorbind, incluziunea mai sus specificată, este strictă, i.e. normele $\|\cdot\|_{MK}$ şi $\|\cdot\|_{var}$ nu sunt echivalente.

Vom vedea acest lucru în cele ce urmează. Pentru început vom sublinia faptul că pentru un spaţiu metric compact (T, d), are loc echivalenţa:

$$T \text{ este infinit } \iff T \text{ are un punct de acumulare.}$$

Se demonstrează următorul rezultat:

Teorema 4.2.3. *Să presupunem că* T *este infinită. Atunci incluziunea* $\mathcal{T}(MK, X) \subset \mathcal{T}(var, X)$ *este strictă.*

Observaţii.

1. Este clar că dacă T este finită are loc egalitatea $\mathcal{T}(var, K) = \mathcal{T}(MK, K)$ întrucât în acest caz spaţiul $cabv(T, K)$ este finit dimensional.

2. Dacă T este infinită spaţiul normat $(cabv(T, X), \|\cdot\|_{MK})$ nu poate fi un spaţiu Banach. În caz contrar, din inegalitatea $\|\cdot\|_{MK} \leq \|\cdot\|_{var}$, ar rezulta egalitatea $\mathcal{T}(var, X) = \mathcal{T}(MK, X)$, ceea ce este fals, după cum am văzut mai înainte.

3. În cazul când T este infinită, neechivalenţa normelor $\|\cdot\|_{var}$ şi $\|\cdot\|_{MK}$ implică existenţa unui şir $(\mu_n)_n \subset cabv(T, X)$ astfel încât $\|\mu_n\|_{MK} = 1$ şi $\|\mu_n\|_{var} > n$, pentru orice n.

4. Întrucat $\mathcal{T}(MK,X) \subset \mathcal{T}(var,X)$, are loc implicaţia:

$$\mu_n \underset{n}{\to} \mu(\text{in } \mathcal{T}(var,X)) \Longrightarrow \mu_n \overset{MK}{\underset{n}{\to}} \mu.$$

Să remarcăm că implicaţia inversă este, în general, falsă (în caz contrar ar rezulta faptul că $\mathcal{T}(var,X) = \mathcal{T}(MK,X)$).

De exemplu, dacă $T = [0,1]$, $X = \mathbb{R}$, să admitem că $\delta_{1/n} \overset{MK}{\underset{n}{\to}} \delta_0$. În acelaşi timp avem $\delta_{1/n}((0,1]) = 1$, pentru orice n, pe când $\delta_0((0,1]) = 0$.

Aşadar afirmaţia $\delta_{1/n} \underset{n}{\to} \delta_0$ în $\mathcal{T}(var,\mathbb{R})$, i.e. $\|\delta_{1/n} - \delta_0\| \underset{n}{\to} 0$ este falsă, întrucât $\delta_{1/n} \underset{n}{\to} \delta_0$ în $\mathcal{T}(var,\mathbb{R})$ implică convergenţa punctuală ($\delta_{1/n}(A) \underset{n}{\to} \delta_0(A)$, pentru orice $A \in \mathcal{B}_T$), ceea ce nu este cazul.

În consecinţă, *convergenţa în topologia Monge-Kantorovici nu implică convergenţa punctuala.* Ulterior vom pune în evidenţă următorul fapt care explică totul: **convergenţa în topologia Monge-Kantorovici nu înseamnă altceva decât convergenţa *slabă** pentru şiruri mărginite.**

B. În continuare vom introduce topologia *slab** pe $cabv(T,X)$. Dacă avem în vedere izomorfismul între $cabv(T,X)$ şi $\mathcal{C}(T,X)'$, putem prezenta topologia în discuţie după cum urmează.

Definiţia 4.2.4. *Topologia slab** pe $cabv(T,X)$, desemnată prin $\mathcal{T}(w^*,X)$, este topologia local convexă (separată) pe $cabv(T,X)$ definită de familia de seminorme $(p_f)_{f\in\mathcal{C}(T,X)}$, unde, oricare ar fi $f \in \mathcal{C}(T,X)$, $p_f : cabv(T,X) \to \mathbb{R}_+$ este dată prin

$$p_f(\mu) = \left| \int f d\mu \right|.$$

Pentru $a > 0$, topologia pe $\mathfrak{B}_a(X)$, indusă de topologia $\mathcal{T}(w^*,X)$, va fi desemnată prin $\mathcal{T}(w^*,X,a)$.

În consecinţă, pentru orice $\mu \in cabv(T,X)$, o bază de vecinătăţi pentru μ este formată din toate mulţimile de forma

$$V(\mu; g_1, g_2, \dots, g_m; \varepsilon) == \{\nu \in cabv(T,X) \left| \left| \int g_i d(\mu - \nu) \right| < \varepsilon, \text{ pentru } i = 1,2,...,m \right\}$$

(se iau în considerare toţi posibilii $\varepsilon > 0$, toţi $m \in \mathbb{N}$ şi toţi $g_i \in \mathcal{C}(T,X)$).

Aplicând teorema lui Alaoglu deducem că pentru orice $a > 0$, mulţimea $\mathfrak{B}_a(X)$ este *slab** compactă (i.e. compactă în topologia $\mathcal{T}(w^*,X)$.

Pentru un şir $(\mu_m)_m \subset cabv(T,X)$ şi pentru $\mu \in cabv(T,X)$, vom nota

$$\mu_m \overset{w^*}{\underset{m}{\to}} \mu$$

pentru a desemna faptul că $(\mu_m)_m$ converge la μ, în $\mathcal{T}(w^*,X)$. (Vom spune că $(\mu_m)_m$ converge *slab** la μ sau că $(\mu_m)_m$ este *slab** convergent). Aceasta înseamnă că

$$\lim_m \int f d\mu_m = \int f d\mu,$$

pentru orice $f \in C(T, X)$.

Putem demonstra că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, spaţiul $\mathcal{C}(T, K^n)$ este separabil. Mai precis, exista un şir $(f_m)_m \subset BL(T, K^n)$ astfel încât $\{f_m \,|m \in \mathbb{N}\}$ este dens în $\mathcal{C}(T, K^n)$(vom spune că $(f_m)_m$ este un *şir dens* $\mathcal{C}(T, K^n)$).

Acest fapt are două consecinţe importante.

Prima Consecinţă.

Fie $(f_m)_m \subset BL(T, K^n)$ un şir dens în $\mathcal{C}(T, K^n)$.

Atunci pentru orice $a > 0$, dacă $(\mu_p)_p \subset \mathfrak{B}_a(K^n)$ şi $\mu \in \mathfrak{B}_a(K^n)$, vom avea echivalenţa:

$$\mu_p \underset{p}{\overset{w^*}{\rightarrow}} \mu \Leftrightarrow \int f_m d\mu_p \underset{p}{\rightarrow} \int f_m d\mu$$

oricare ar fi $m \in \mathbb{N}$.

A doua Consecinţă (Metrizabilitatea topologiei $\mathcal{T}(w^*, K^n, a)$ a lui $\mathfrak{B}_a(K^n)$).

Pentru orice $a > 0$ şi orice $n \in \mathbb{N}$, topologia $\mathcal{T}(w^*, K^n, a)$ este metrizabilă. Mulţimea $\mathfrak{B}_a(K^n)$ este compactă, ca submulţime a spaţiului topologic $cabv(T, K^n)$, înzestrat cu topologia $\mathcal{T}(w^*, K^n)$.

În consecintă, $\mathfrak{B}_a(K^n)$ considerat ca spaţiu metric (în raport cu oricare dintre metricele care generează topologia $\mathcal{T}(w^*, K^n, a)$), este un spaţiu metric complet.

Acest rezultat este crucial pentru restul lucrării.

Faptul ca topologia $\mathcal{T}(w^*, K^n, a)$ este metrizabilă se deduce din separabilitatea lui $\mathcal{C}(T, K^n)$ şi din teoria generală (cf. Dunford & Schwartz, vol. I, V 5.1., p 426).

Vom avea nevoie de următoarea

Teorema 4.2.5. *(Teorema Arzela-Ascoli). Fie $n \in \mathbb{N}$. Submulţimea. $BL_1(T, K^n)$ este relativ compactă în $\mathcal{C}(T, K^n)$.*

Vom începe investigarea conexiunii dintre topologiile $\mathcal{T}(w^*, T, X)$ şi $\mathcal{T}(MK, T, X)$.

Teorema 4.2.6. *Fie T un spaţiu metric compact, X un spaţiu Hilbert peste K şi $a > 0$. Se consideră un şir $(\mu_m)_{m \geq 1} \subset \mathfrak{B}_a(X)$ şi un $\mu \in \mathfrak{B}_a(X)$. Atunci dacă $\mu_m \underset{m}{\overset{MK}{\rightarrow}} \mu$ vom avea $\mu_m \underset{m}{\overset{w^*}{\rightarrow}} \mu$.*

În continuare vom răspunde la întrebarea: în ce condiţii este adevărata şi reciproca acestui rezultat ?

Vom demonstra:

Teorema 4.2.7. *Fie T un spaţiu metric compact, X un spaţiu Hilbert (peste K) **finit dimensional** şi $a > 0$. Se consideră un şir $(\mu_m)_{m \geq 1} \subset \mathfrak{B}_a(X)$ şi un $\mu \in \mathfrak{B}_a(X)$. În aceste conditii dacă $\mu_m \underset{m}{\overset{w^*}{\rightarrow}} \mu$ atunci $\mu_m \underset{m}{\overset{MK}{\rightarrow}} \mu$.*

Remarcă. Se construiesc, destul de simplu, contraexemple care să arate că, în cazul in care $\dim_K X = \infty$, afirmaţia din enunţ nu mai este adevărată.

Corolar 4.2.8. *(Coincidenţa* convergenţei slabe* *cu* convergenţa Monge-Kantorovich*).*

*Fie T un spaţiu metric compact, $a > 0$ şi X un spaţiu Hilbert **finit** dimensional. Atunci, pentru un şir $(\mu_m)_m \subset \mathfrak{B}_a(X)$ and $\mu \in \mathfrak{B}_a(X)$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\mu_m \underset{m}{\overset{MK}{\rightarrow}} \mu$

2. $\mu_m \underset{m}{\overset{w*}{\rightarrow}} \mu$

Să interpretăm ultimele rezultate.

Vom alege în mod arbitrar $a > 0$ şi $n \in \mathbb{N}$. Pe bila închisă $\mathfrak{B}_a(K^n)$ avem următoarele două topologii metrizabile: $\mathcal{T}(MK, K^n, a)$ şi $\mathcal{T}(w^*, K^n, a)$ (a se vedea a doua consecinţă).

Corolarul 4.2.8 afirmă că în cele două topologii menţionate avem aceleaşi şiruri convergente. Întrucât topologiile în chestiune sunt şi metrizabile deducem că aceste topologii vor coincide:

$$\mathcal{T}(MK, K^n, a) = \mathcal{T}(w^*, K^n, a).$$

Utilizând încă o dată a doua consecinţă, va rezulta şi faptul că bila $\mathfrak{B}_a(K^n)$ este compactă în topologia $\mathcal{T}(w^*, K^n, a)$, deci şi în topologia $\mathcal{T}(MK, K^n, a)$. Prin urmare bila $\mathfrak{B}_a(K^n)$ va fi un spaţiu metric complet în raport cu metrica indusă de norma $\|\cdot\|_{MK}$.

Aşadar am obţinut

Teorema 4.2.9. *Pentru orice $a > 0$ şi orice $n \in \mathbb{N}$, bila $\mathfrak{B}_a(K^n)$, inzestrată cu metrica indusă de către norma Monge-Kantorovici $\|\cdot\|_{MK}$, este un spaţiu metric compact, deci şi un spaţiu metric complet.*

Este naturală întrebarea dacă ultimul rezultat rămâne valabil şi în cazul în care K^n se înlocuieşte cu un spaţiu Hilbert oarecare (peste K). Din păcate răspunsul este *"NU"*, chiar şi pentru spaţii Hilbert infinit dimensionale, separabile.

C. În această ultimă secţiune a paragrafului dedicat prezentării spaţiilor pe care le vom utiliza în lucrarea noastră, introducem, pe un subspaţiu al lui $cabv(T, X)$, o nouă normă, strâns legată de norma Monge-Kantorovici, deja prezentată.

Subspaţiul în chestiune va fi

$$cabv(T, X; 0) := \{\mu \in cabv(T, X) \mid \mu(T) = 0\}.$$

Este evident faptul că $cabv(T, X; 0)$ este un subspaţiu închis în $cabv(T, X)$. De fapt, avem de-a face cu o proprietate mai tare, şi anume se poate demonstra următorul:

Rezultat 1. Subspaţiul $cabv(T, X; 0)$ al lui $cabv(T, X)$ este *slab** închis (i.e. este închis în topologia $\mathcal{T}(w^*, X)$).

În continuare vom defini

$$L_1(T, X) := \{f \in L(T, X) \mid \|f\|_L \le 1\}.$$

Întrucât $\|\cdot\|_L \le \|\cdot\|_{BL}$, avem

$$BL_1(T, X) \subset L_1(T, X). \tag{$**$}$$

Pentru un $\mu \in cabv(T, X; 0)$, arbitrar, vom defini

$$\|\mu\|^*_{MK} := \sup\{\left|\int f d\mu\right| \mid f \in L_1(T, X)$$

.

Aşadar

$$\|\mu\|^*_{MK} = \sup\{\left|\int f d\mu\right| \mid \|f\|_L \le 1\}.$$

Propoziţia 4.2.10. *Oricare ar fi $\mu \in cabv(T, X; 0)$, avem*

$$\|\mu\|^*_{MK} \le \|\mu\|_{var}\, diam(T) \tag{4.12}$$

Remarcă. Nu este posibilă extinderea definiţiei lui $\|\cdot\|^*_{MK}$ „dincolo“ de spaţiul $cabv(T, X; 0)$. Aşadar $cabv(T, X; 0)$ este domeniul natural de definiţie pentru $\|\cdot\|^*_{MK}$.

Pentru a fi mai precişi, fie

$$p : cabv(T, X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

o asemenea extensie:

$$p(\mu) = \sup\{\left|\int f d\mu\right| \mid \|f\|_L \leq 1\}.$$

Rezultatul 2.

1) p este o seminormă extinsă, i.e. pentru orice μ, ν în $cabv(T, X)$ şi orice $\alpha \in K$ avem

$$\begin{array}{lcl} p(\mu+\nu) & \leq & p(\mu) + p(\nu) \\ p(\alpha\mu) & = & |\alpha|\, p(\mu) \end{array}$$

(cu convenţia $0 \cdot \infty = 0$).

2) $p(\mu) < \infty \Longleftrightarrow \mu(T) = 0$ (i.e. $\mu \in cabv(T, X; 0)$).

Definiţia 4.2.11. Norma $\|\cdot\|_{MK}^{*}$ pe $cabv(T, X; 0)$ poartă numele de *norma Monge-Kantorovici modificată.*

Observaţii.

1. Unii autori utilizează termenul de "norma Monge-Rubinstein " în locul termenilor "norma Monge-Kantorovich " şi "norma Monge-Kantorovici modificată", preferaţi de noi.

   În acelaşi spirit, anumiţi autori folosesc termenul " distanţa Monge-Rubinstein" în locul termenilor "distanţa Monge-Kantorovici" si "distanţa Monge-Kantorovici modificată" prefera'c ti de noi (a se vedea ulterior).

2. "Extinderea" definiţiei lui $\|\cdot\|_{MK}^{*}$ la intreg $cabv(T, X)$ este periculoasă întrucât se poate obţine rezultatul ∞, după cum am văzut.

   Pentru a fi mai expliciţi, notând
   $$\|\mu\|_{MK}^{*} = \sup\left\{\left|\int f d\mu\right| \mid f \in L_1(T, X)\right\},$$
   vom obţine $\|\mu\|_{MK}^{*} = \infty$, pentru un anume $\mu \in cabv(T, X)$.

   De exemplu, alegând $T = [0, 1]$, $X = K$, $\mu\colon \mathcal{B}_T \to \mathbb{R}_+$ măsura Lebesgue, pentru orice funcţie constantă $f \equiv a > 0$ (i.e. $f\colon [0, 1] \to K$, $f(t) = a$) vom obţine:
   $$\int f d\mu = a$$
   şi deci $\|\mu\|_{MK}^{*} = \infty$.

   Aşadar necesitatea utilizării spaţiului mai mic $cabv(T, X; 0)$ apare în mod clar (fapt deja evidenţiat prin **Rezultatul 2**).

3. Aşadar, pentru orice $\mu \in cabv(T, X; 0)$ şi orice $f \in L(T, X) = BL(T, X)$, vom avea
   $$\left|\int f d\mu\right| \leq \|f\|_L \, \|\mu\|_{MK}^{*}$$

   Afirmaţia este în mod evident adevărată dacă $\|f\|_L = 0$, i.e. f este o funcţie constantă, întrucât $\mu(T) = 0$.

   În cazul $\|f\|_L > 0$, funcţia
   $$g := \frac{1}{\|f\|_L} f$$
   este din $L_1(T, X)$ şi $\left|\int g d\mu\right| \leq \|\mu\|_{MK}^{*}$. Continuarea este directă!

Următorul rezultat este foarte important.

Teorema 4.2.12. *Normele* $\|\cdot\|_{MK}$ *şi* $\|\cdot\|_{MK}^{*}$ *sunt echivalente pe* $cabv(T, X; 0)$. *Mai precis, pentru orice* $\mu \in cabv(T, X; 0)$*, avem*

$$\|\mu\|_{MK} \leq \|\mu\|_{MK}^{*} \leq \|\mu\|_{MK}\,(diam(T) + 1) \tag{4.13}$$

Remarcă. 1. Pentru un şir $(\mu_n)_n \subset cabv(T, X; 0)$ şi pentru $\mu \in cabv(T, X; 0)$, vom scrie

$$\mu_n \overset{MK^*}{\underset{n}{\to}} \mu$$

pentru a desemna faptul ca $(\mu_n)_n$ converge la μ în distanta indusa de norma $\|\cdot\|_{MK}^{*}$. Este de reţinut că această notaţie nu este necesară (conform Teoremei 4.2.12)

$$\mu_n \overset{MK^*}{\underset{n}{\to}} \mu \Leftrightarrow \mu_n \overset{MK}{\underset{n}{\to}} \mu$$

2. Relatiile (4.12) şi (4.13) descriu în mod satisfacator raporturile dintre normele $\|\cdot\|_{var}$, $\|\cdot\|_{MK}$ şi $\|\cdot\|_{MK}^{*}$.

Definiţia 4.2.13. Să considerăm o mulţime nevidă $A \subset cabv(T, X)$.

1. *Distanţa variaţională* pe A este dată prin

$$d_{\|\cdot\|}(\mu, \nu) \overset{def}{=} \|\mu - \nu\|\,, \text{ pentru } \mu, \nu \;\in\; A.$$

2. *Distanţa Monge-Kantorovici* pe A este dată prin

$$d_{MK}(\mu, \nu) \overset{def}{=} \|\mu - \nu\|_{MK}\,, \text{ pentru } \mu, \nu \;\in\; A.$$

3. Să presupunem, în mod suplimentar, că $A \subset cabv(T, X)$ are proprietatea că $\mu - \nu \in cabv(X, 0)$, pentru orice $\mu, \nu \in A$. *Distanţa Monge-Kantorovici modificată* pe A este dată prin

$$d_{MK}^{*}(\mu, \nu) \overset{def}{=} \|\mu - \nu\|_{MK}^{*}\;.$$

Vom utiliza această din urma distanţă în următorul context:
Pentru un vector oarecare $\mathbf{v} \in X$ definim

$$cabv(T, X; \mathbf{v}) = \{\mu \in cabv(T, X) \mid \mu(T) = \mathbf{v}\}$$

În cazul $\mathbf{v} = 0$, obţinem $cabv(T, X; 0)$, şi prin urmare "noua" notatie va fi compatibila cu cea "veche".

În mod evident $\delta_t \mathbf{v} \in cabv(T, X; \mathbf{v})$ pentru orice $t \in T$.

În continuare sa consideram $\emptyset \neq A \subset cabv(T, X; \mathbf{v})$. Atunci $\mu - \nu \in cabv(T, X; 0)$, oricare ar fi $\mu, \nu \in A$.

Prin urmare orice mulţime nevidă $A \subset cabv(T, X; \mathbf{v})$ poate fi metrizată cu metrica d_{MK}^{*}.

Fie $a > 0$ şi $\mathbf{v} \in X$. Vom spune că a şi $\mathbf{v}$ sunt *compatibile* dacă $a \geq \|\mathbf{v}\|$. În acest caz $\mathfrak{B}_a(X, \mathbf{v}) \neq \emptyset$, întrucât $\delta_t \mathbf{v} \in \mathfrak{B}_a(X, \mathbf{v})$, pentru orice $t \in T$ ($\|\delta_t \mathbf{v}\|_{var} = \|\mathbf{v}\|$), unde

$$\mathfrak{B}_a(X, \mathbf{v}) := \mathfrak{B}_a(X) \cap cabv(T, X; \mathbf{v}).$$

În general noi vom lucra cu mulţimi $A \subset \mathfrak{B}_a(X, \mathbf{v})$.

Consideraţiile precedente arată că pe $\mathfrak{B}_a(X, \mathbf{v})$ se poate considera distanţa Monge-Kantorovici modificat u a data prin

$$d^*_{MK}(\mu, \nu) = \|\mu - \nu\|^*_{MK}$$

şi distanţa Monge-Kantorovici dat prin

$$d_{MK}(\mu, \nu) = \|\mu - \nu\|_{MK}\,.$$

Aceste două distanţe sunt echivalente. Mai precis, pentru orice $\mu, \nu \in \mathfrak{B}_a(X, v)$ avem:

$$d_{MK}(\mu, \nu) \leq d^*_{MK}(\mu, \nu) \leq d_{MK}(\mu, \nu)(diam(T) + 1)$$

Teorema 4.2.14. *Fie $a > 0$ şi $v \in X$ compatibile ($\|\mathbf{v}\| \leq a$). Atunci*

1. *Mulţimea $\mathfrak{B}_a(X, \mathbf{v})$ este* slab* *inchisa în $\mathfrak{B}_a(X)$; prin urmare $\mathfrak{B}_a(X, \mathbf{v})$ este* slab* *compacta. Pe $\mathfrak{B}_a(X, \mathbf{v})$ avem metricele echivalente d_{MK} şi d^*_{MK}.*
2. *Pentru $n \in \mathbb{N}$ şi $X = K^n$ avem următorul rezultat suplimentar: bila închisa $\mathfrak{B}_a(K^n)$, echipată cu una dintre metricele echivalente d_{MK} sau d^*_{MK} , este compactă, prin urmare va fi un spaţiu metric complet (topologia sa fiind egală cu topologia* slaba**).*
3. *În cazul particular în care $K = \mathbb{R}$, $n = 1$ şi $\mathbf{v} \geq 0$, se poate considera mulţimea*

$$\mathfrak{B}^+_a(\mathbb{R}, \mathbf{v}) = \mathfrak{B}_a(\mathbb{R}, \mathbf{v}) \cap cabv^+(T, \mathbb{R})$$

unde

$$cabv^+(T, \mathbb{R}) = \{\mu \in cabv(T, \mathbb{R}) \,|\, \mu \geq 0\,\}.$$

Atunci $\mathfrak{B}^+_a(\mathbb{R}, \mathbf{v})$, echipată cu una dintre metricele echivalente d_{MK} sau d^*_{MK} este compactă, prin urmare va fi un spaţiu metric complet (topologia sa fiind egală cu topologia slaba**).*

Pentru $a = \mathbf{v} = 1$, $\mathfrak{B}^+_1(\mathbb{R}, 1) = \mathbb{P}(T)$ este exact mulţimea probabilităţilor pe $\mathcal{B}_T$.

4.2.4 Consideraţii suplimentare privind spaţiile de funcţii vectoriale continue şi norma Monge-Kantorovich

În acest subparagraf prezentăm rezultate (probabil originale) privind densitatea lui $BL(T, X)$ în $\mathcal{C}(T, X)$ şi separabilitatea lui $\mathcal{C}(T, X)$. Vom vedea că putem lucra cu spaţii X infinit dimensionale.

Ca de obicei, vom considera un spaţiu metric compact (T, d) şi un spaţiu Hilbert X peste $\mathbb{K}$, echipat cu produsul scalar (x, y) şi norma $\|\cdot\|$. Notăm cu $\mathcal{C}(T, X)$ spaţiul Banach al tuturor funcţiilor continue $f : T \to X$, echipat cu norma uzuală a convergenţei uniforme:

$$\|f\|_\infty = sup\{\|f(t)\| \mid t \in T\}$$

Teorema 4.2.15. *Fie T un spaţiu metric compact şi X un spaţiu Hilbert peste K. Atunci $BL(T, X) := BL(X)$ este dens în $\mathcal{C}(T, X) := \mathcal{C}(X)$, dacă ultimul spaţiu se înzestrează cu norma naturală $\|\cdot\|_\infty$; aşadar pentru orice $f \in \mathcal{C}(T, X)$ si orice $\varepsilon > 0$ există $g_\varepsilon \in BL(T, X)$ astfel incât $\|f - g_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$.*

În particular, dacă X este separabil, rezultă că şi $\mathcal{C}(T, X)$ este separabil.

4.3 Cadrul de lucru

Vom considera un spaţiu metric compact (T, d) şi un spaţiu Hilbert X peste $\mathbb{K}$ echipat cu produsul scalar (x, y) şi norma $\|\cdot\|$. Notăm cu $\mathcal{C}(T, X)$ spaţiul Banach al tuturor funcţiilor continue $f : T \to X$ echipat cu norma

$$\|f\|_\infty = sup\{\|f(t)\| \mid t \in T\}$$

.

În general, pentru orice spaţiu topologic (Y, τ), mulţimile boreliene ale acestui spaţiu vor fi notate prin $\mathcal{B}_Y$. Aşadar, mulţimile boreliene ale lui T vor fi notate cu $\mathcal{B}_T$, mulţimile boreliene ale lui X vor fi notate prin $\mathcal{B}_X$. Mulţimile boreliene produs vor fi notate prin $\mathcal{B}_T \otimes \mathcal{B}_T$ şi ştim că $\mathcal{B}_T \otimes \mathcal{B}_T = \mathcal{B}_{T\times T}$.

Avem şi notaţii de forma $\mathcal{B}_T \otimes \Sigma$ sau $\mathcal{B}_X \otimes \Sigma$ (unde Σ este o anumită σ-algebră).

Dacă $(E, \|\cdot\|)$ şi $(F, |\|\cdot\||)$ sunt spaţii normate, notăm

$$\mathcal{L}(E, F) = \{V : E \to F \mid V \text{ este aplicaţie liniară şi continuă}\}$$

care devine spaţiu normat (chiar Banach dacă Y este Banach) cu norma operatorială

$$\|V\|_o = sup\{|\|V(x)\|| \mid x \in X, \|x\| \le 1\}.$$

În particular, notăm $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = E'$ =dualul (algebrico-topologic al lui E) şi $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$.

Pentru orice spaţiu normat $(E, \|\cdot\|)$ putem considera spaţiul vectorial

$$\begin{aligned} cabv(T, E) = \{m : \mathcal{B}_T \to E \mid\ & m \text{ este } \sigma - \text{aditivă şi} \\ & \text{are variaţia totală } |m|(T) < \infty\}. \end{aligned}$$

Atunci, $cabv(T, E)$ devine spaţiu Banach cu norma variaţională

$$\|m\| = |m|(T).$$

Pentru a putea discuta despre dualul $\mathcal{C}(T, X)'$, reamintim existenţa izomorfismului antiliniar Riesz-Fréchet $P : X \to X'$, definit prin $P(y) = V_y$, unde $V_y(x) = (x, y)$, pentru orice $x \in X$. Avem două moduri de a prezenta dualul $\mathcal{C}(T, X)'$.

<u>Modul clasic</u>

Există un izomorfism liniar izometric

$$\Gamma : cabv(T, X') \to \mathcal{C}(T, X)'$$

(pe $cabv(T, X')$ avem norma variaţională), acţionând astfel:

a) Pentru orice $m' \in cabv(T, X')$, putem defini integrala funcţiilor simple

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} \varphi_{A_i} x_i$$

$(A_i \in \mathcal{B}_T \text{ disjuncte}, x_i \in X)$ prin

$$\int^* \varphi\, dm' = \sum_{i=1}^{m} m'(A_i)(x_i) \in \mathbb{K}.$$

b) Această integrală se extinde la mulţimea $\mathcal{TM}(T,X)$ a funcţiilor total măsurabile (i.e. care sunt limite uniforme de funcţii simple) astfel:

$$\int^* \varphi\, dm' = \lim_n \int^* \varphi_n dm',$$

dacă $\varphi_n \xrightarrow[n]{u} \varphi$ (convergenţă uniformă)

c) Deoarece $\mathcal{C}(T,X) \subset \mathcal{TM}(T,X)$, putem defini

$$\int^* f\, dm'$$

pentru orice $f \in \mathcal{C}(T,X)$.

Atunci, pentru orice $m' \in cabv(T,X)$, definim

$$\Gamma(m') : \mathcal{C}(T,X) \to \mathbb{K} \text{ prin}$$

$$\Gamma(m')(f) = \int^* f\, dm,$$

a se vedea [21].

<u>Modul antiliniar</u> (folosit în prezentul capitol)

Există un izomorfism antiliniar izometric

$$\phi : cabv(T,X) \to \mathcal{C}(T,X)',$$

acţionând astfel:

a) Avem izomorfismul antiliniar izometric

$$\Omega : cabv(T,X) \to cabv(T,X'), \text{definit prin}$$
$$\Omega(m) = P \circ m = m'$$

b) Definim $\phi = \Gamma \circ \Omega$ (care este izomorfism antiliniar şi izometric).

Aşadar, avem schema

$$cabv(T,X) \xrightarrow{\Omega} cabv(T,X') \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{C}(T,X)'.$$

Se vede că, dacă $m \in cabv(T,X)$ şi $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} x_i$ este funcţie simplă, ca mai înainte, avem $\Omega(m) = m'$ şi

$$\int^* \varphi\, dm' = \sum_{i=1}^{n} m'(A_i)(x_i) = \sum_{i=1}^{n} P(m(A_i))(x_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i, m(A_i)) = \int \varphi\, dm,$$

în sensul integralei seschiliniare folosite în această teză.

Prin urmare, dacă $m \in cabv(T,X)$ şi $f \in \mathcal{C}(T,X)$, vom avea

$$y'(f) = \int f\, dm, \text{ unde } y' = \phi(m).$$

Pentru a putea completa cadrul de lucru, vom reaminti că, dacă (M, d) şi (N, δ) sunt două spaţii metrice, o funcţie $f : M \to N$ se numeşte lipschtziană dacă

$$\|f\|_L = \sup_{\substack{s,t \in M \\ s \neq t}} \frac{\delta(f(s), f(t))}{d(s,t)} < \infty.$$

Evident,

$$\delta(f(s), f(t)) \leq \|f\|_L \cdot d(s,t) \text{ pentru orice } s, t \in M.$$

Vom nota

$$L(M, N) = \{f : M \to N \mid f \text{ este lipschitziană}\}$$

(În cazul când $M = N$, scriem $L(M)$ în loc de $L(M, M)$.)

Dacă N este spaţiu normat, rezultă că $L(M, N)$ este spaţiu vectorial seminormat cu seminorma $f \mapsto \|f\|_L$.

În acest caz, avem

$$L(M, N) \supset BL(M, N) = \{f \in L(M, N) \mid f \text{ este mărginită}\}$$

şi $BL(M, N)$ devine spaţiu normat cu norma

$$f \mapsto \|f\|_{BL} = \|f\|_\infty + \|f\|_L.$$

În cadrul prezent, avem (evident)

$$L(T, X) = BL(T, X).$$

Completarea cadrului

Vom considera un spaţiu cu măsură (Θ, Σ, W) (spaţiul de indici), precum şi două funcţii $\omega : T \times \Theta \to T, R : X \times \Theta \to X$ care sunt presupuse măsurabile, anume: ω este $(\mathcal{B}_T \otimes \Sigma, \mathcal{B}_T)$-măsurabilă şi R este $(\mathcal{B}_X \otimes \Sigma, \mathcal{B}_X)$-măsurabilă.

În acest context, vom folosi şi notaţia indicială, după cum urmează: pentru orice $\theta \in \Theta$, avem funcţiile $\omega_\theta : T \to T$ (respectiv $R_\theta : X \to X$) definite prin

$$\omega_\theta(t) = \omega(t, \theta) \text{ (respectiv } R_\theta(x) = R(x, \theta)), \text{ adică}$$
$$\omega_\theta = \omega(\cdot, \theta) \text{ şi } R_\theta = R(\cdot, \theta).$$

Vom presupune că, pentru orice $\theta \in \Theta : \omega_\theta \in L(T)$ cu $\|\omega_\theta\|_L = r_\theta$ şi
$R_\theta \in \mathcal{L}(X, X)$.

Dacă toate $r_\theta < 1$, funcţiile ω_θ sunt contracţii.

Înainte de a trece mai departe în expunerea cadrului, facem

Remarcă. Cazul particular când spaţiul cu măsură (Θ, Σ, W) este discret este foarte important. Avem în vedere următoarele situaţii:

Cazul finit

$$\Theta = \{1, 2, \cdots, n\}, \Sigma = \mathcal{P}(\Theta), W \text{ este măsura cardinal}$$
$$(W(A) = card(A) \text{ pentru orice } A \subset \Theta)$$

Cazul numărabil

$$\Theta = \mathbb{N}^*, \Sigma = \mathcal{P}(\Theta), W \text{ este } \underline{\text{măsura discretă}}$$
$$(W(A) = card(A), \text{ dacă } A \text{ este finită şi } W(A) = \infty, \text{ dacă } A \text{ este infinită})$$

În acest caz, a spune că $\omega : T \times \Theta \to T$ este $(\mathcal{B}_T \otimes \Sigma, \mathcal{B}_T)$ - măsurabilă este echivalent cu a spune că $\omega_\theta : T \to T$ este $(\mathcal{B}_T, \mathcal{B}_T)$ - măsurabilă pentru orice $\theta \in \Theta$.

Într-adevăr, o implicaţie este banală (anume, că orice ω_θ trebuie să fie măsurabilă).

Reciproc, dacă acceptăm că orice ω_θ este funcţie măsurabilă, rezultă pentru orice $B \in \mathcal{B}_T$:

$$\begin{aligned}\omega^{-1}(B) &= \{(t,\theta) \mid \omega(t,\theta) = \omega_\theta(t) \in B\}\\ &= \bigcup_{\theta\in\Theta} \left(\omega_\theta^{-1}(B) \times \{\theta\}\right) \in \mathcal{B}_T \times \mathcal{P}(\Theta).\end{aligned}$$

Prin urmare, în cazul discret, măsurabilitatea funcţiei ω este automat verificată, deoarece toate ω_θ sunt continue. $\square$

Continuăm prezentarea cadrului de lucru.

Vom mai presupune că funcţia $Ind : \Theta \to \mathbb{R}_+$, definită prin

$$Ind(\theta) = \|R_\theta\|_o,$$

este $(\Sigma, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+})$-măsurabilă.

Condiţia de mai sus trebuie impusă în ipoteze. Totuşi, dacă spaţiul X este separabil, măsurabilitatea funcţiei Ind este automată, după cum rezultă din următoarea:

Remarcă. În cazul când X este separabil, funcţia Ind este automat măsurabilă.

Într-adevăr, fie $A \subset X$ o mulţime numărabilă densă în X. Avem, pentru orice $\theta \in \Theta$,

$$\|R_\theta\|_o = \sup_{\|x\|\le 1} \|R_\theta(x)\| = \sup_{\substack{\|x\|\le 1\\ x\in A}} \|R_\theta(x)\| \tag{4.14}$$

De asemenea, pentru orice $x \in X$, funcţia $\theta \mapsto R_\theta(x)$ este $(\Sigma, \mathcal{B}_X)$ măsurabilă, deci funcţia $\theta \mapsto \|R_\theta(x)\|$ este $(\Sigma, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+})$ măsurabilă.

Deoarece supremumul din (4.14) este construit pentru o mulţime numărabilă, rezultă că funcţia $\theta \mapsto \|R_\theta\|_o$ este $(\Sigma, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+})$ măsurabilă.

Avem nevoie de

Lema 4.3.1. *În toate cazurile, funcţia $Lip : \Theta \to [0,\infty)$, definită prin $Lip(\theta) = r_\theta$ este $(\Sigma, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+})$ măsurabilă.*

Având în vedere acest rezultat, impunem şi ultima condiţie, care încheie prezentarea cadrului de lucru.

Să presupunem că

$$\int_\Theta Ind(\theta)(1 + Lip(\theta))\, dW(\theta) < \infty,$$

adică

$$\int_\Theta \|R_\theta\|_o \cdot (1 + r_\theta)\, dW(\theta) < \infty.$$

În cazul când *Lip* este mărginită (de exemplu, în cazul când toate funcţiile ω_θ sunt contracţii), ultima condiţie este echivalentă cu

$$\int_\Theta \|R_\theta\|_o \, dW(\theta) < \infty.$$

4.4 Operatori pe spaţii de funcţii continue

Lema 4.4.1. *Pentru orice $f \in \mathcal{C}(T,X)$ şi orice $t \in T$, funcţia $U : \Theta \to X$, definită prin*

$$U(\theta) = (R_\theta \circ f \circ \omega_\theta)(t),$$

este integrabilă Bochner în raport cu W.

În baza precedentului rezultat, rezultă că, pentru orice $f \in \mathcal{C}(T,X)$, putem defini funcţia

$$H(f) : T \to X$$

prin relaţia (integrală Bochner)

$$H(f)(t) = \int (R_\theta \circ f \circ \omega_\theta)(t) \, dW(\theta)$$

Teorema 4.4.2. *Pentru orice $f \in \mathcal{C}(T,X)$, avem $H(f) \in \mathcal{C}(T,X)$.*

Teorema 4.4.2 ne spune că putem considera operatorul

$$H_C : \mathcal{C}(T,X) \to \mathcal{C}(T,X),$$

definit prin

$$H_C(f) = H(f),$$

care este evident liniar.

Teorema 4.4.3. *Operatorul $H_C : \mathcal{C}(T,X) \to \mathcal{C}(T,X)$ este liniar şi continuu. Anume, pentru orice $f \in \mathcal{C}(T,X)$, avem*

$$\|H_C(f)\|_\infty \leq \left(\int \|R_\theta\|_o \, dW(\theta) \right) \cdot \|f\|_\infty,$$

$$\text{adică } \|H_C\|_o \leq \int \|R_\theta\|_o \, dW(\theta).$$

În continuare, „restrângem” domeniul de definiţie al lui H_C, considerând funcţii lipschitziene.

Lema 4.4.4. *Fie $f \in L(T,X) = BL(T,X)$. Atunci, pentru orice s, t în T, avem*

$$\|H(f)(s) - H(f)(t)\| \leq \left(\int \|(R_\theta\|_o \cdot r_\theta \, dW(\theta) \right) \cdot \|f\|_L \cdot d(s,t).$$

Rezultă

Teorema 4.4.5. *Pentru orice $f \in L(T,X)$, avem $H(f) \in L(T,X)$ şi*

$$\|H(f)\|_L \leq \|f\|_L \cdot \int \|R_\theta\|_o \cdot r_\theta \, dW(\theta).$$

Putem deci considera operatorul (evident liniar)

$$H_L : L(T,X) \to L(T,X),$$

definit prin

$$H_L(f) = H(f).$$

Considerăm pe $L(T,X)$ norma $\|\cdot\|_{BL}$ şi obţinem

Teorema 4.4.6. *Operatorul $H_L : (L(T,X), \|\cdot\|_{BL}) \to (L(T,X), \|\cdot\|_{BL})$ este liniar şi continuu şi avem*

$$\|H_L\|_o \leq \int \|R_\theta\|_o \cdot (1 + r_\theta) \, dW(\theta).$$

În continuare, vom considera $H_C : \mathcal{C}(T,X) \to \mathcal{C}(T,X)$ şi adjunctul său $H'_C : \mathcal{C}(T,X)' \to \mathcal{C}(T,X)'$, definit ca de obicei prin

$$H'_C(y') = y' \circ H_C = x'.$$

Ne reamintim şi de izomorfismul antiliniar şi izometric $\phi : cabv(T,X) \to \mathcal{C}(T,X)'$ şi considerăm diagrama

$$\begin{array}{ccc} cabv(T,X) & \xrightarrow{\mathcal{H}} & cabv(T,X) \\ \phi \downarrow & & \phi^{-1} \uparrow\downarrow \phi \\ \mathcal{C}(T,X)' & \xrightarrow[H'_C]{} & \mathcal{C}(T,X)' \end{array}$$

Anume, cu ajutorul lui H'_C şi ϕ putem defini

$$\mathcal{H} : cabv(T,X) \to cabv(T,X)$$

prin

$$\mathcal{H} = \phi^{-1} \circ H'_C \circ \phi$$

Deoarece ϕ şi ϕ^{-1} sunt antiliniare, rezultă că $\mathcal{H}$ este aplicaţie liniară şi continuă.

Diagrama de mai înainte este comutativă, adică avem

$$\phi \circ \mathcal{H} = H'_C \circ \phi \tag{4.15}$$

Teorema 4.4.7 (Teorema de schimbare de variabilă)**.** *Pentru orice $f \in \mathcal{C}(T,X)$ şi orice $\nu \in cabv(T,X)$, avem*

$$\int f \, d\mathcal{H}(\nu) = \int H_C(f) \, d\nu.$$

În continuare, vom efectua evaluări privind normele operatorului $\mathcal{H}$ privit ca aţionând pe $cabv(T,X)$ (sau subspaţii ale lui $cabv(T,X)$) cu diverse norme.

Pornim, bineînţeles, cu $cabv(T,X)$ normat cu norma obişnuită variaţională: $\|\mu\| \stackrel{def}{=} |\mu|(T)$.

Teorema 4.4.8. $\mathcal{H} : (cabv(T,X), \|\cdot\|) \to (cabv(T,X), \|\cdot\|)$ *este liniar şi continuu şi avem*

$$\|\mathcal{H}\|_{o,var} \leq \int \|R_\theta\|_o \, dW(\theta).$$

Lucrăm cu norma Monge-Kantorovich, deci considerăm

$$\mathcal{H} : (cabv(T,X), \|\cdot\|_{MK}) \to (cabv(T,X), \|\cdot\|_{MK})$$

şi obţinem:

Teorema 4.4.9.

$$\mathcal{H} : (cabv(T,X), \|\cdot\|_{MK}) \to (cabv(T,X), \|\cdot\|_{MK})$$

este liniar şi continuu şi avem

$$\|\mathcal{H}\|_{o,MK} \leq \int \|R_\theta\|_o (1 + r_\theta) \, dW(\theta).$$

Pentru a putea discuta despre $\mathcal{H}$ în contextul normei Monge-Kantorovich modificate, avem nevoie de următorul rezultat intermediar.

Lema 4.4.10. *Pentru orice* $\nu \in cabv(T,X,0) = \{\mu \in cabv(T,X) \mid \mu(T) = 0\}$*, avem* $\mathcal{H}(\nu) \in cabv(T,X,0)$*.*

Rezultatul precedent arată că putem „restrânge şi corestrânge" operatorul $\mathcal{H}$ la spaţiul $cabv(T,X,0)$. Cu alte cuvinte, putem considera operatorul (evident liniar)

$$\mathcal{H}_1 : cabv(T,X,0) \to cabv(T,X,0),$$

definit prin

$$\mathcal{H}_1(\mu) = \mathcal{H}(\mu).$$

Teorema 4.4.11.

$$\mathcal{H}_1 : (cabv(T,X,0), \|\cdot\|^*_{MK}) \to (cabv(T,X,0), \|\cdot\|^*_{MK})$$

este liniar şi continuu şi avem

$$\|\mathcal{H}_1\|_o \leq \int \|R_\theta\|_o \cdot r_\theta \, dW(\theta).$$

4.5 Cazuri particulare

A. Semigrupuri de operatori

Reamintim că un semigrup uniform continuu de operatori este $P : [0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$ cu următoarele proprietăţi:

a) P este continuă (pe $\mathcal{L}(X)$ se consideră topologia dată de norma operatorială $\|\cdot\|_o$);

b) $P(0) = I$ $(I : X \to X, I(x) = x$ pentru orice $x \in X)$;

c) $P(s+t) = P(s) \circ P(t)$ pentru orice s, t în $[0,\infty)$.

Se arată că există (în norma $\|\cdot\|_o$)

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(P(t)-P(0)\right)=A\in\mathcal{L}(X)$$

(A se numeşte generatorul semigrupului).

Atunci, avem analoaga celebrei teoreme de aditivitate a lui Cauchy: pentru orice $t\in[0,\infty)$,

$$P(t)=e^{tA}=I+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(tA)^n \text{ (în norma } \|\cdot\|_o)$$

De exemplu, dacă vom lua, pentru orice $t\in[0,\infty)$, $P(t)=e^{-t}I$, vom constata că $A=-I$, deci

$$P(t)=e^{-tI} \text{ şi } \|P(t)\|_o=e^{-t},\ \forall t\in[0,\infty).$$

Ne încadrăm în schema noastră iniţială după cum urmează.

Luăm (Θ,Σ,W) astfel:

$$\begin{aligned}\Theta&=[0,\infty),\Sigma=\text{borelienele lui }[0,\infty)\text{ şi}\\ W&=\text{măsura Lebesgue pe }[0,\infty).\end{aligned}$$

Luăm un spaţiu Hilbert X oarecare şi un semigrup uniform continuu de operatori $(R_\theta)_{\theta\in[0,\infty)}$ (aici scriem R_θ în loc de $R(\theta)$), care generează funcţia

$$\begin{aligned}&R:X\times[0,\infty)\to X,\ \text{definită prin}\\ &R(x,\theta)=R_\theta(x)\end{aligned}$$

Funcţia R este $(\mathcal{B}_X\otimes\mathcal{B}_{[0,\infty)},\mathcal{B}_X)$-măsurabilă, deoarece este continuă şi $\mathcal{B}_X\otimes\mathcal{B}_{[0,\infty)}=\mathcal{B}_{X\times[0,\infty)}$.

Continuitatea lui R rezultă astfel: dacă $x_n\underset{n}{\to}x$ în X şi $t_n\underset{n}{\to}t$ în $[0,\infty)$, atunci

$$\begin{aligned}\|R(x_n,\theta_n)-R(x,\theta)\|&=\|R_{\theta_n}(x_n)-R_\theta(x)\|\\ &\le\|R_{\theta_n}(x_n)-R_{\theta_n}(x)\|+\|R_{\theta_n}(x)-R_\theta(x)\|\\ &\le\|R_{\theta_n}\|_o\cdot\|x_n-x\|+\|R_{\theta_n}-R_\theta\|_o\|x\|\\ &\le(\|R_\theta\|_o+\delta)\cdot\|x_n-x\|+\|R_n-R\|_o\cdot\|x\|,\end{aligned}$$

unde $\delta>0$ poate fi luat arbitrar (pentru $n\ge n(\delta)$ suficient de mare, deoarece $\|R_{\theta_n}\|_o\underset{n}{\to}\|R_\theta\|$) şi $R(x_n,\theta_n)\underset{n}{\to}R(x,\theta)$.

Completăm schema luând $T=[0,1]$, iar funcţiile $\omega_\theta:[0,1]\to[0,1]$ se obţin după cum urmează.

Fie $a:[0,\infty)\to[0,1]$ o funcţie continuă cu $a(0)=1$ şi $a(\theta)>0$ pentru orice $\theta\in[0,\infty)$. (de exemplu, putem lua $a(\theta)=\frac{1}{1+\theta}$.)

Fie şi $\omega:[0,1]\to[0,1]$ o funcţie lipschitziană fixată.

Vom defini, pentru orice $\theta\in[0,\infty)$, pe

$$\begin{aligned}&\omega_\theta:[0,1]\to[0,1],\ \text{prin}\\ &\omega_\theta(t)=a(\theta)\cdot\omega_0(t)\end{aligned}$$

(Se vede că $\omega_0(t)=a(0)\cdot\omega_0(t)=\omega_0(t)$ este coerent definită)

Faptul că funcţia

$$\begin{aligned} \omega :& [0,1]\times[0,\infty)\to[0,1] \text{ dată prin} \\ & \omega(t,\theta)=\omega_\theta(t) \end{aligned}$$

este $(\mathcal{B}_{[0,1]}\otimes\mathcal{B}_{[0,\infty)},\mathcal{B}_{[0,1]})$-măsurabilă, rezultă din faptul că ω este continuă (avem $\mathcal{B}_{[0,1]}\otimes\mathcal{B}_{[0,\infty)}=\mathcal{B}_{[0,1]\times[0,\infty)}$)

În plus, pentru orice $\theta\in[0,\infty)$, avem:

$$r_\theta=\sup_{\substack{s,t\in[0,1]\\ s\neq t}}\frac{|\omega_\theta(s)-\omega_\theta(t)|}{|s-t|}=a(\theta)\cdot\|\omega_0\|_L$$

Impunem şi condiţia

$$\int_0^\infty \|R_\theta\|_o\cdot(1+r_\theta)\,dW(\theta)<\infty,$$

echivalentă cu

$$\int_0^\infty \|R_\theta\|_o\,d\theta<\infty.$$

În cazul particular când $R_\theta=e^{-\theta}I$ pentru orice $\theta\in[0,\infty)$, avem $\|R_\theta\|_o=e^{-\theta}$ şi condiţia se îndeplineşte.

În acest caz, pentru orice $f\in\mathcal{C}(T,X)$, vom avea, dacă $t\in[0,1]$:

$$\begin{aligned} H(f)(t)&=\int_0^\infty(R_\theta\circ f\circ\omega_\theta)(t)\,dW(\theta)=\int_0^\infty R_\theta(f(a(\theta)\cdot\omega_0(t)))\,d\theta\\ &=\int_0^\infty e^{-\theta}f(a(\theta)\cdot\omega_0(t))\,d\theta. \end{aligned}$$

În particular, dacă luăm $x\in X$ şi $f(t)=t\cdot x$ pentru orice $t\in[0,1]$:

$$H(f)(t)=\int_0^\infty(e^{-\theta}\cdot a(\theta)\cdot\omega_0(t))\cdot x\,d\theta=\omega_0(t)\cdot\Big(\int_0^\infty e^{-\theta}a(\theta)\,d\theta\Big)\cdot x$$

B. Cazul când toate aplicaţiile ω_θ sunt constante

Considerăm în schema generală prezentată la început situaţia când, pentru orice $\theta\in\Theta$, funcţia $\omega_\theta:T\to T$ este constantă:

$$\omega_\theta(t)=t_\theta\in T \text{ pentru orice } t\in T.$$

Putem defini $\varphi:\Theta\to T$ prin $\varphi(\theta)=t_\theta$. Rezultă că $\omega(t,\theta)=\varphi(\theta)$ pentru orice $t\in T$ şi $\theta\in\Theta$, deci

$$\omega^{-1}(B)=T\times\varphi^{-1}(B) \text{ pentru orice } B\in\mathcal{B}_T.$$

Aşadar, măsurabilitatea lui ω revine la faptul că φ este $(\Sigma,\mathcal{B}_T)$-măsurabilă. Evident, $r_\theta=0$ pentru orice $\theta\in\Theta$, deci trebuie să mai avem şi

$$\int_0^\infty \|R_\theta\|_o\,d\theta<\infty.$$

Pentru orice $f \in \mathcal{C}(T, X)$,orice $\theta \in \Theta$ şi orice $t \in T$, avem

$$H(f)(t) = \int (R_\theta \circ f \circ \omega_\theta)(t)\, dW(\theta) = \int R_\theta(f(\varphi(\theta)))\, dW(\theta) \in X,$$

deci funcţia $H(f)$ este constantă.

Încercăm să urmărim acţiunea operatorului $\mathcal{H}$ în acest caz. Pentru aceasta facem următoarea

Remarcă. Dacă $V : \Theta \to X$ este integrabilă Bochner în raport cu W şi $x \in X$, atunci

$$\Big(\int V(\theta)\, dW(\theta), x \Big) = \int (V(\theta), x)\, dW(\theta)$$

(integrala din stânga este Bochner, iar integrala din dreapta este integrală Lebesgue abstractă standard).

Demonstraţia este similară cu demonstraţia faptului că, dacă Y este un spaţiu Banach şi $S : X \to Y$ este un operator liniar şi continuu, atunci

$$S\Big(\int V(\theta)\, dW(\theta) \Big) = \int (S \circ V)(\theta)\, dW(\theta).$$

Revenind la problemele noastre, vom avea, pentru orice $\nu \in cabv(T, X)$::

$$\int f\, d\mathcal{H}(\nu) = \int H(f)\, d\nu.$$

Deoarece

$$H(f) = \varphi_T \cdot \int R_\theta(f(\varphi(\theta)))\, dW(\theta), \text{ rezultă că}$$

$$\int H(f)\, d\nu = \Big(R_\theta(f(\varphi(\theta))), \nu(T) \Big) = \Big(f\big(\varphi(\theta)\big), R^*_\theta(\nu(T)) \Big),$$

adică

$$\int f\, d\mathcal{H}(\nu) = \Big(f(\varphi(\theta)), R^*_\theta(\nu(T)) \Big), \text{ unde}$$

R^*_θ este adjunctul hilbertian al lui R_θ.

<u>C. Cazul discret</u>

<u>C1. Cazul finit</u>

În schema iniţială, vom lua $\Theta = \{1, 2, \cdots, M\}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\Theta)$ şi W măsura cardinal.

Urmărim să calculăm în acest caz pe $\mathcal{H}(\nu)$, pentru orice $\nu \in cabv(T, X)$. Pentru aceasta, facem trei observaţii preliminare:

Remarcă. [Schimbare de variabilă] Pentru orice $f \in \mathcal{C}(T, X)$, orice $\omega : T \to T$ continuă şi orice $\mu \in cabv(T, X)$, avem

$$\int f\, d(\omega(\mu)) = \int (f \circ \omega)\, d\mu$$

unde $\omega(\mu) : \mathcal{B}_T \to X$ este măsura transportată, definită prin

$$\omega(\mu)(A) = \mu(\omega^{-1}(A)).$$

Verificare algebrică uşoară pentru f simplă, $f = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} x_i$ (deoarece $f \circ \omega = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{\omega^{-1}(A_i)} x_i$) şi trecere la limită uniformă pentru $f \in \mathcal{C}(T, X)$.

Remarcă. Pentru orice $f \in \mathcal{C}(T, X)$, orice $R \in \mathcal{L}(X)$ şi orice $\mu \in cabv(T, X)$ avem

$$\int (R \circ f)\, d\mu = \int f\, d(R^* \circ \mu)$$

Verificare algebrică uşoară pentru f simplă şi trecere la limită uniformă pentru $f \in \mathcal{C}(T, X)$.

Remarcă. În contextul de mai sus, pentru orice $f \in \mathcal{C}(T, X)$, avem

$$H(f) = \sum_{i=1}^{M} R_i \circ f \circ \omega_i.$$

Într-adevăr, dacă $t \in T$, avem

$$H(f)(t) = \int (R_\theta \circ f \circ \omega_\theta)(t)\, dW(\theta) = \sum_{i=1}^{M} (R_i \circ f \circ \omega_i)(t).$$

Teorema 4.5.1. *În contextul de mai sus, pentru orice $\nu \in cabv(T, X)$, avem*

$$\mathcal{H}(\nu) = \sum_{i=1}^{M} R_i^* \circ \omega_i(\nu).$$

Remarcă. Vom reveni cu consideraţii suplimentare asupra acestui rezultat.

C2. Cazul numărabil

În schema inţială, vom lua $\Theta = \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\Theta)$ şi W măsura discretă.
Prin urmare, se îndeplineşte condiţia

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|R_i\|_o \cdot (1 + r_i) < \infty.$$

Teorema 4.5.2. *În contextul anterior, avem:*

1. *Pentru orice $f \in \mathcal{C}(T, X)$:*

$$H_C(f) = \sum_{i=1}^{\infty} R_i \circ f \circ \omega_i$$

(convergenţă absolută în $\mathcal{C}(T, X)$).

2. *Pentru orice $\nu \in cabv(T, X)$:*

$$\mathcal{H}(\nu) = \sum_{i=1}^{\infty} R_i^* \circ \omega_i(\nu)$$

(convergenţă în $cabv(T, X)$ cu norma variaţională).

4.6 Măsuri invariante fractale

Cu ajutorul operatorului $\mathcal{H}$ (cu variante), vom construi anumite contracţii pe anumite spaţii de măsuri vectoriale. Aplicând acestor contracţii principiul contracţiilor (Banach-Caccioppoli-Picard) vom găsi măsuri puncte fixe pe care le vom numi măsuri invariante sau fractale, în spiritul modelului standard dat de operatorul Markov.

În mod concret, vom considera operatorul

$$\mathcal{H} : cabv(T, X) \to cabv(T, X)$$

şi normele deja introduse pe $cabv(T, X)$ sau pe subspaţiul $cabv(T, X, 0)$. Corespunzător, avem normele operatoriale evaluate deja:

$$\|\mathcal{H}\|_{o,var} \leq \int \|R_\theta\|_o \, dW(\theta)$$

(vezi Teorema 4.4.8)

$$\|\mathcal{H}\|_{o,MK} \leq \int \|R_\theta\|_o \cdot (1 + r_\theta) \, dW(\theta)$$

(vezi Teorema 4.4.9)

$$\|\mathcal{H}_1\|_o \leq \int \|R_\theta\|_o \cdot r_\theta \, dW(\theta)$$

(vezi Teorema 4.4.11)

Vom impune condiţii care să asigure apariţia de contracţii, anume

$$\begin{cases} \int \|R_\theta\|_o \, dW(\theta) < 1 \\ \int \|R_\theta\|_o (1 + r_\theta) \, dW(\theta) < 1 \\ \int \|R_\theta\|_o \cdot r_\theta dW(\theta) < 1 \end{cases} \tag{4.16}$$

Contracţiile promise vor fi construite cu ajutorul a două scheme.

Vom considera că una din condiţiile (4.16) se îndeplineşte.

Prima schemă

Considerăm o mulţime nevidă $A \subset cabv(T, X)$ cu proprietatea că $\mathcal{H}(A) \subset A$.

Definim $H_1 : A \to A$ prin relaţia

$$H_1(\nu) = \mathcal{H}(\nu).$$

Va rezulta că norma operatorială corespunzătoare, notată generic prin $\|\mathcal{H}\|_o$, are calitatea că $\|\mathcal{H}\|_o < 1$ şi, H_1 este contracţie, de aceea

$$\|H_1(\mu) - H_1(\nu)\| \leq \|\mathcal{H}\|_o \cdot \|\mu - \nu\|$$

A doua schemă

Considerăm o mulţime nevidă $A \subset cabv(T, X)$ şi o măsură $\mu^o \in cabv(T, X)$ cu proprietatea că

$$\mathcal{H}(A) + \mu^o \stackrel{def}{=} \{\mathcal{H}(\mu) + \mu^o \mid \mu \in A\} \subset A.$$

Definim

$$H_2 : A \to A \text{ prin}$$
$$H_2(\mu) = \mathcal{H}(\mu) + \mu^o.$$

Va rezulta că norma operatorială corespunzătoare, notată generic $\|\mathcal{H}\|_o$, are calitatea că $\|\mathcal{H}\|_o < 1$ şi H_2 este o contracţie, deoarece

$$\|H_2(\mu) - H_2(\nu)\| \leq \|\mathcal{H}\|_o \cdot \|\mu - \nu\|.$$

Vom aplica în mod concret aceste două scheme în cazul particular finit.

După cum am văzut (Teorema 4.5.1), în acest caz avem formula (validă pentru orice $\nu \in cabv(T,X)$):

$$\mathcal{H}(\nu) = \sum_{i=1}^{M} R_i^* \circ \omega_i(\nu)$$

Vom lucra pentru R_i^* în loc de R_i, prin urmare, în acest caz vom avea

$$\mathcal{H}(\nu) = \sum_{i=1}^{M} R_i \circ \omega_i(\nu)$$

Deoarece $\|R^*\|_o = \|R\|_o$, putem folosi condiţiile (4.16) „traduse” în acest caz în forma

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{M} \|R_i\|_o < 1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{M} \|R_i\|_o (1 + r_i) < 1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{M} \|R_i\|_o \cdot r_i < 1 \end{cases} \tag{4.17}$$

În cele ce urmează, vom simplifica notaţiile, după cum urmează:

– scriem H în loc de $\mathcal{H}$ (nu este pericol de confuzie, în baza acestei explicaţii);

– scriem $cabv(X)$ în loc de $cabv(T,X)$;

Pentru orice $\nu \in cabv(X)$, introducem notaţia specială

$$cabv(X,\nu) = \{\mu \in cabv(X) \mid \mu(T) = \nu\}$$

Se vede că, dacă ν_1 şi ν_2 sunt în $cabv(X,\nu)$, rezultă că

$$\nu_1 - \nu_2 \in cabv(X,0).$$

(ne amintim că $cabv(X,0) = cabv(T,X,0)$)

De asemenea, vom folosi, pentru orice $a > 0$ şi $\nu \in X$, notaţiile

$B_a(X) = \{\mu \in cabv(X) \mid \|\mu\| \leq a\}$ (norma variaţională)
$B_a(X,\nu) = B_a(X) \cap cabv(X,\nu)$

Bibliografie

[1] P. Arnoux, S. Starosta, *The Rauzy Gasket*, In Further Developments in Fractals and Related Fields, J.Barral, S.Seuret (Editors), Birkhäuser, 2013,1-23.

[2] C. Bandt, *Simple Infinitely Ramified Self-Similar Sets.* In Recent Developments in Fractals and Related Fields, J.Barral, S.Seuret (Editors), Birkhäuser, 2010, 235-249.

[3] M. F. Barnsley, *Fractals everywhere*, Academic Press Professional, Boston,1993

[4] M. F. Barnsley, *Superfractals*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[5] M. F. Barnsley, J. E. Hutchinson, Ö. Stenflo, *V-variable fractals: Fractals with partial self similarity*, Advances in Mathematics 218 (2008), 2051-2088.

[6] K. Baron, A. Lasota, *Markov operators on the space of vector measures, coloured fractals*, Ann. Pol. Math., 69 (1998), 217-234.

[7] V. Berinde, *Iterative approximation of fixed points* (Lecture Notes in Mathematics), 2nd Rev. and Enlarged Ed., 2007.

[8] P. Billingsley, *Convergence of Probability measures*, John Wiley&Sons, 1968.

[9] R. M. Dudley, *Real Analysis and Probability*, Wadswords&Brooks,1989.

[10] I. Chiţescu, *Spaţii de funcţii*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1983.

[11] I. Chiţescu, N. Secelean, *Elemente de teoria măsurii şi integralei*, Editura Fundaţiei „România de Mâine“ Bucureşti, 1999.

[12] I. Chiţescu, R. Miculescu, *Approximation of Fractals Generated by Fredholm Integral Equations*, J. Comput. Analysis Appl.,11, no 2 (2009), 286-293

[13] I. Chiţescu, H. Georgescu, R. Miculescu, *Approximation of Infinite Dimensional Fractals Generated by Integral Equations*, J. Comp. Appl. Math.,234, no 5 (2010),1417-1425.

[14] I. Chiţescu, H. Georgescu, R. Miculescu, *Approximation of Fractals Generated by Hammerstein-Type Operators*, In Handbook on the Classification and Application of Fractals, K.J.Brennan (Editor), Nova Science Publishers, Inc,New York, 2012, 355-371

[15] I. Chiţescu, L. Ioana, R. Miculescu, *Type $\mathcal{A}$ Sets and the Attractors of Infinite Iterated Function Systems*, Results Math. 66 (2014), 511-524.

[16] I. Chiţescu, R. Miculescu, L. Ioana, L. Niţă, *Sesquilinear Uniform Vector Integral*, Proc. Indian Acad. Sci (Math.Sci.), vol 125, no 2 (2015),187-198.

[17] I. Chiţescu, R. Miculescu, L. Niţă, L. Ioana, *Monge-Kantorovich Norms on Spaces of Vector Measures*, Results in Mathematics, 2016, Springer International Publishing, DOI 10.1007/s00025-016-0531-1.23 (in print).

[18] R. Cristescu, *Noţiuni de analiză funcţională liniară*, Ed. Acad. Române, Bucureşti,1998.

[19] J. Diestel, J. J. Uhl Jr., *Vector Measures*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1977

[20] N. Dinculeanu, *Teoria măsurii şi funcţii reale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1964.

[21] N. Dinculeanu, *Vector Measures*,VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin,1966.

[22] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators* Part I: *General Theory*, 1957; Part III: *Spectral Operators*, 1971. Interscience Publishers, Inc, NewYork, London, Sydney, Toronto.

[23] K. Falconer, *Random fractals*, Math.Proc.Cambridge Philos.Soc., 100 (1986), 559-582.

[24] K. Falconer, *Fractal Geometry* (third edition), Wiley, 2014.

[25] P. Fatou, *Sur les équations fonctionnelles*, Bull. Soc. Math. France, 47 (1919),161-271.

[26] H. Federer, *Geometric measure theory*, Grundlehren Math.Wiss, Band 153, Springer-Verlag, New York Inc, 1969.

[27] O. Van Gaans, *Probability measures on metric spaces* (articol online)

[28] P. R. Halmos, *Measure Theory*, D.Van Nostrand Company, Inc (eleventh printing),1966.

[29] J. E. Hutchinson, *Fractals and self-similarity*, Indiana Univ. Math. J. 30 (1981), 713-741.

[30] G. Julia, *Mémoire sur l'iteration des fonctions rationnelles*, J. Math. Pures Appl., 4 (1918), 47-245.

[31] L.V. Kantorovici, G. P. Akilov, *Analiză funcţională*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986.

[32] J. L. Kelley, *General Topology*, American Book-Van Nostrand-Reinhold, 1969.

[33] J. Kigami, *Analysis on Fractals*, Cambridge University Press, 2001.

[34] A. S. Kravchenko, *Completeness of the space of separable measure in Kantorovici-Rubinshtein metric*, Sibirsk. Mat. Zh., 47(1) (2006), 85-96.

[35] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Company,New York, 1983.

[36] R. D. Mauldin, M. Urbanski, *Dimensions and measures in infinite iterated function systems*, Proc. London Math. Soc. 73 (1996), 105-154.

[37] F.Mendivil, *A generalization of IFS with probabilities to infinitely many maps*, Rocky Mountain J.Math.28, no.3 (1998).

[38] F.Mendivil, E. R.Vrscay, *Self-affine vector measures and vector calculus on fractals*.In Fractals in Multimedia M.F.Barnsley, D.Saupe, E.R.Vrscay (Editors), Springer 2002, p 137-157.

[39] R. Miculescu, A. Mihail, *Lipscomb's space* ω^A *is the attractor of an infinite IFS containing affine transformations of* $l^2(A)$, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), 587-592.

[40] R.Miculescu, L.Ioana, *Some connections between the attractors of on IIFS* $\mathcal{S}$ *and the attractors of the sub-IFSs of* $\mathcal{S}$, Fixed Point Theory Appl. 141 (2012).

[41] A. Mihail, R. Miculescu, *The shift space for an infinite iterated function system*, Math. Reports 11 (61), 1 (2009), 21-32.

[42] J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable.* Introductory Lectures (3rd ed), Princeton University Press, Princeton, 2006.

[43] M. Nicolescu, *Funcţii reale şi elemente de topologie*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti,1968.

[44] S. C. Rachev, *Probability Metrics and the Stability of Stochastic Models*, John Wiley&Sons,1991.

[45] I. A. Rus, A. Petrusel, G. Petrusel, *Fixed point theory*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2008, xx+509 pp. ISBN:978-973-610-810-5.

[46] N. Secelean, *Măsură şi fractali*, Editura Univ. „Lucian Blaga“, Sibiu, 2002.

[47] C. Tudor, *Teoria probabilităţilor*, Editura Universităţii din Bucureşti, 2004.